



UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.: (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 1466

Programme 6
Calcul Scientifique, Modélisation et
Logiciels numériques

ETUDE DE LA CONVERGENCE ASYMPTOTIQUE DE PROBLEMES DE PLAQUE THERMOELASTIQUE

Dominique BLANCHARD
Christophe LEBELTEL

Juin 1991



ETUDE DE LA CONVERGENCE ASYMPTOTIQUE DE PROBLEMES DE PLAQUE THERMOELASTIQUE

Dominique BLANCHARD* et Christophe LEBELTEL**

Résumé

Ce rapport traite de la convergence des termes inconnus dans des problèmes de plaque thermoélastique dont l'épaisseur tend vers zéro. Le modèle choisi est celui de la thermoélasticité linéarisée et la présente étude, qui fait suite à l'approche formelle par méthode asymptotique développée dans une publication antérieure, en apporte la confirmation et la justification des résultats.

STUDY OF THE ASYMPTOTIC CONVERGENCE OF THERMOELASTIC PLATE PROBLEMS

Abstract

This report deals with the convergence of the unknown terms in problems of a thermoelastic plate whose thickness tends towards zero. The chosen model is that of linearized thermoelasticity and the present study, following on from previously published work, confirms and justifies its results obtained by the formal approach using an asymptotic method.

* Université de Rouen, Département de mathématiques, B.P. 138, 76134 Mont-Saint Aignan Cédex

** INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, B.P. 105, 78153 Le Chesnay Cédex

Sommaire

Introduction	1
1. Position du problème, notations, hypothèses	2
2. Etude de la convergence dans le cas $\gamma^\epsilon = \epsilon\gamma$	10
3. Etude de la convergence dans le cas $\gamma^\epsilon = \gamma/\epsilon$	26
4. Etude de la convergence dans le cas $\gamma^\epsilon = \gamma$	43
Conclusion	45
Références	46

Introduction

Ce rapport est consacré à l'étude du comportement dynamique d'une plaque mince thermoélastique dont l'épaisseur tend vers 0. Nous nous plaçons dans le cadre de la thermoélasticité linéarisée.

Des forces volumiques et surfaciques sont appliquées à la plaque, qu'on suppose en outre encastrée sur sa surface latérale et soumise sur ses deux faces supérieure et inférieure à une condition aux limites d'échange de chaleur.

Notre démarche s'appuie sur la méthode des développements asymptotiques décrite dans Ciarlet & Destuynder [1979a], [1979b] pour une plaque élastique. Les travaux de Raoult [1980] procèdent de même dans le cas dynamique. Enfin, plus proches encore de nos considérations, ceux de Blanchard & Francfort [1987] s'appliquent à une plaque thermoélastique. C'est sur la condition limite imposée à la température que notre étude se distingue de la leur.

L'approche formelle par développements asymptotiques a fait l'objet d'un précédent rapport, Lebeltel [1989]; celui-ci en constitue une suite logique en confirmant ses résultats par une étude de la convergence. La première partie est un rappel des notations et hypothèses. La plaque s'inscrit dans une famille indexée par son épaisseur 2ϵ et, une fois posés les changements d'échelle sur les inconnues et les données, nous écrivons sur un ouvert fixe indépendant de ϵ les équations qui la régissent. Puis, dans les deuxième, troisième et dernier paragraphes, nous traitons de la convergence quand ϵ tend vers 0 du problème 3D vers un problème limite 2D que nous définissons. Ces parties se distinguent par l'hypothèse faite sur le coefficient de transfert de chaleur γ^ϵ apparaissant dans la condition limite d'échange de la température; en effet, nous examinons successivement les trois cas:

$$\gamma^\epsilon = \epsilon\gamma, \gamma^\epsilon = \gamma/\epsilon \text{ puis } \gamma^\epsilon = \gamma,$$

où γ est une constante indépendante de ϵ .

Dans la première situation, nous parvenons à établir des résultats de convergence, faible d'abord, puis forte; pour cela notre démarche suit celle empruntée dans Blanchard & Francfort [1987]. Dans les deux suivantes en revanche, plus difficiles, les convergences sont établies dans un sens faible. Mais dans tous les cas, nous constatons une coïncidence entre le problème vérifié par les termes limites et celui que nous avait fourni l'approche formelle de Lebeltel [1989].

1 Position du problème, notations, hypothèses

On utilise les deux conventions habituelles :

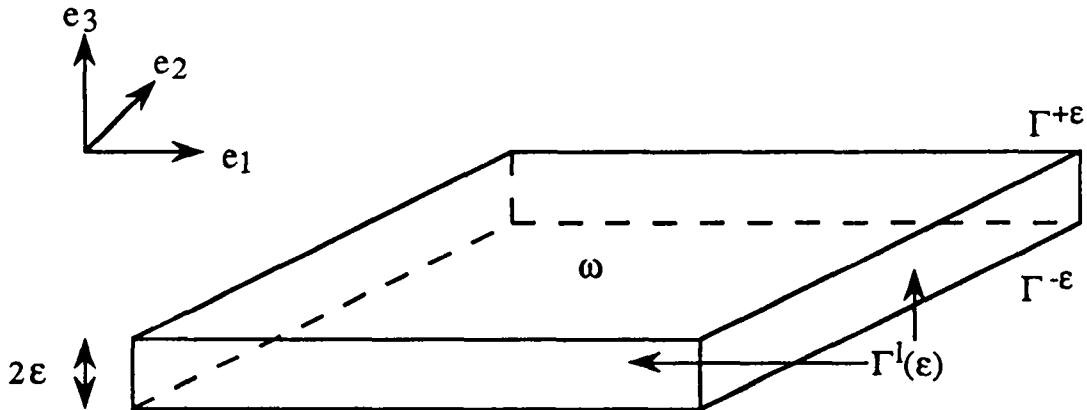
- indice latin $\epsilon \{1; 2; 3\}$, indice grec $\epsilon \{1; 2\}$
- la convention de sommation sur les indices répétés.

Pour tout tenseur d'ordre 2, b , nous posons $Trb = b_{ii}$ et $trb = b_{\alpha\alpha}$

La plaque 3D est définie par $\Omega^\epsilon = \omega \times]-\epsilon, \epsilon[$ où ω est un domaine borné régulier de \mathbf{R}^2 et 2ϵ mesure l'épaisseur de la plaque.

$\Gamma^{\pm\epsilon} = \omega \times \{\pm\epsilon\}$ sont ses deux faces supérieure et inférieure

$\Gamma^\epsilon(\epsilon) = \partial\omega \times]-\epsilon, \epsilon[$ est sa surface latérale.



On note $\Omega, \Gamma^\pm, \Gamma^\epsilon$ les ensembles $\Omega^1, \Gamma^{\pm 1}, \Gamma^\epsilon(1)$. Ω est dit ouvert fixe.

L'espace étant rapporté à une base (e_1, e_2, e_3) , si $y = (x_1, x_2)$, à tout point $x^\epsilon = (y, \epsilon x_3)$ de Ω^ϵ , on associe le point $x = (y, x_3)$ de Ω .

On définit les espaces

$$H(\epsilon) = \{v \in H^1(\Omega^\epsilon), v = 0 \text{ sur } \Gamma^\epsilon(\epsilon)\}$$

$$\mathbf{H}(\epsilon) = [H(\epsilon)]^3$$

$$Y(\epsilon) = \{\tau \in [L^2(\Omega^\epsilon)]^9, \tau \text{ symétrique}\}$$

On note H, \mathbf{H}, Y les espaces $H(1), \mathbf{H}(1), Y(1)$.

Soit $V_{KL} = \{v \in \mathbf{H} \mid v_3 \in H_0^2(\omega) \text{ et } \exists \tilde{v}_\alpha \in [H_0^1(\omega)]^2 \text{ t.q. } v_\alpha = \tilde{v}_\alpha - x_3 \partial_\alpha v_3\}$

$e_{ij}^\epsilon(u^\epsilon)(x^\epsilon) = \frac{1}{2} (\partial_j^\epsilon u_i^\epsilon + \partial_i^\epsilon u_j^\epsilon)(x^\epsilon)$ est le tenseur linéarisé des déformations.

Pour toute fonction f , posons $\bar{f} = \int_{-1}^{+1} f(x, t) dx_3$ et $\dot{f} = \frac{d}{dt} f$

On suppose que la plaque est constituée d'un matériau homogène et isotrope.

Elle est totalement décrite par un ensemble de trois équations posées sur l'ouvert Ω^ϵ :

- une loi de comportement

$$(1) \quad e_{ij}^\epsilon(u^\epsilon) - \alpha^\epsilon \theta^\epsilon \delta_{ij} = \frac{1 + \nu^\epsilon}{E^\epsilon} \sigma_{ij}^\epsilon - \frac{\nu^\epsilon}{E^\epsilon} Tr \sigma^\epsilon \delta_{ij} \quad \text{dans } \Omega^\epsilon$$

de type Kirchhoff-Love, prenant en compte le terme de température et énoncée dans le cadre de la thermoélasticité linéarisée

- une équation du mouvement

$$(2) \quad \rho^\epsilon \ddot{u}_i^\epsilon = \partial_j^\epsilon \sigma_{ij}^\epsilon + f_i^\epsilon \quad \text{dans } \Omega^\epsilon$$

qui considère l'aspect évolutif du problème, pour une plaque soumise à des forces de volume

- une équation d'estimation de l'énergie

$$(3) \quad \beta^\epsilon \dot{\theta}^\epsilon = \frac{k^\epsilon}{T_0} \partial_{jj}^\epsilon \theta^\epsilon - \frac{E^\epsilon \alpha^\epsilon}{1 - 2\nu^\epsilon} Tr e(u^\epsilon) \quad \text{dans } \Omega^\epsilon$$

qui s'ajoute aux équations habituelles d'une plaque élastique pour en décrire l'aspect thermique

où

ν^ϵ est le rapport de Poisson, $-1 < \nu^\epsilon < \frac{1}{2}$

E^ϵ est le module d'Young, $E^\epsilon > 0$

α^ϵ est le coefficient de dilatation thermique, $\alpha^\epsilon > 0$

ρ^ϵ est la densité de masse, $\rho^\epsilon > 0$

f_i^ϵ désignent les composantes de la densité de forces volumiques

β^ϵ est le coefficient de chaleur spécifique, $\beta^\epsilon > 0$

k^ϵ est le coefficient de conductivité de la chaleur, $k^\epsilon > 0$

u^ϵ est le champ de déplacement

σ^ϵ est le deuxième tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff

T_0 est une température de référence supposée connue

θ^ϵ est l'écart, par rapport à T_0 , de la température à l'intérieur de la plaque

On suppose que, pour la famille de plaques considérée, il existe des valeurs constantes ν, E, α, β, k telles que $\forall \epsilon > 0, \forall x^\epsilon \in \Omega^\epsilon$,

$$\nu^\epsilon(x^\epsilon) = \nu, \quad E^\epsilon(x^\epsilon) = E, \quad \alpha^\epsilon(x^\epsilon) = \alpha, \quad \beta^\epsilon(x^\epsilon) = \beta, \quad k^\epsilon(x^\epsilon) = k$$

et que, de plus, $\exists \rho \in \mathbb{R}_+^*, \forall \epsilon > 0, \forall x^\epsilon \in \Omega^\epsilon$,

$$\rho^\epsilon(x^\epsilon) = \epsilon^2 \rho$$

Remarque 1.1

Les conditions limites sont celles d'une plaque totalement encastrée sur sa surface latérale, dont on fixe la température sur ce bord, et soumise sur ses deux faces supérieure et inférieure à des forces de surface et à une condition d'échange de chaleur avec le milieu extérieur.

Dans la loi de Fourier (4)₂, le coefficient γ^ϵ est habituellement caractéristique de l'échange de flux de chaleur entre la plaque et le milieu extérieur. La donnée γ^ϵ est donc un paramètre physique du problème posé. Il est courant, quand on utilise les méthodes asymptotiques, d'autoriser une dépendance des données physiques du problème envisagé par rapport à ϵ (nous renvoyons par exemple au chapitre 4 de Ciarlet [1990] ou à Aufranc [1990] dans lesquels on suppose pour les constantes de Lamé : $\lambda^\epsilon = \epsilon^{-3}\lambda, \mu^\epsilon = \epsilon^{-3}\mu$). C'est d'ailleurs ce que nous avons fait, comme dans Raoult [1980], pour la masse volumique ρ^ϵ . Nous nous limiterons dans cet article à l'examen de trois dépendances possibles de γ^ϵ en fonction de ϵ : $\gamma^\epsilon = \gamma, \gamma^\epsilon = \epsilon\gamma$ et $\gamma^\epsilon = \gamma/\epsilon$ où γ est une constante indépendante de ϵ . Dans la première situation, les caractéristiques de l'échange de chaleur entre la plaque et le milieu extérieur sont supposées indépendantes de l'épaisseur de la plaque. Les deuxième et troisième cas correspondent à des dépendances simples, modèles et représentatives de problèmes dans

lesquels l'échange tend vers 0 ou vers l'infini avec l'épaisseur de la plaque.

conditions aux bords

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sigma_{i3}^\epsilon n_3^\epsilon = g_i^{\pm\epsilon} & \text{sur } \Gamma^{\pm\epsilon} \\ k \partial_3^\epsilon \theta^\epsilon n_3^\epsilon + \gamma^\epsilon (\theta^\epsilon - \theta^{\pm\epsilon}) = q^{\pm\epsilon} & \text{sur } \Gamma^{\pm\epsilon} \\ \theta^\epsilon = 0 & \text{sur } \Gamma^\ell(\epsilon) \\ u^\epsilon = 0 & \text{sur } \Gamma^\ell(\epsilon) \end{array} \right.$$

où

$g_i^{\pm\epsilon}$ désignent les composantes de la densité de forces surfaciques

γ^ϵ est le coefficient de transfert de chaleur, $\gamma^\epsilon > 0$

$q^{\pm\epsilon}$ est la composante verticale du flux de chaleur sur $\Gamma^{\pm\epsilon}$ supposé connu

n^ϵ est le vecteur normal extérieur à la plaque en un point de sa surface.

Enfin, on impose à la plaque les

conditions initiales

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} u^\epsilon(0) = u_0^\epsilon \\ \dot{u}^\epsilon(0) = v_0^\epsilon \\ \theta^\epsilon(0) = \theta_0^\epsilon \end{array} \right.$$

Dans ce système, les termes inconnus sont le déplacement u^ϵ et la température θ^ϵ . Les inconnues sont donc au nombre de quatre (les trois composantes de u^ϵ et θ^ϵ), ce qui correspond au nombre d'équations scalaires du système (2) - (3) dans lequel, grâce à la loi de comportement (1), l'on peut exprimer les termes de contraintes en fonction du déplacement et de la température.

Sous les hypothèses

$$(6) \quad \left| \begin{array}{l} f^\epsilon \in W^{1,2}(0, T, [L^2(\Omega^\epsilon)]^3) \\ g^{\pm\epsilon} \in W^{2,2}(0, T, [L^2(\omega)]^3) \\ \theta^{\pm\epsilon} \in L^2(0, T, L^2(\omega)) \\ q^{\pm\epsilon} \in L^2(0, T, L^2(\omega)) \\ u_0^\epsilon \in [H^2(\Omega^\epsilon)]^3 \cap \mathbf{H}(\epsilon) \\ v_0^\epsilon \in \mathbf{H}(\epsilon) \\ \theta_0^\epsilon \in H^2(\Omega^\epsilon) \cap H(\epsilon) \end{array} \right.$$

le système (1) - (5) admet une solution et une seule $(u^\epsilon, \theta^\epsilon)$ vérifiant

$$(7) \quad \left| \begin{array}{l} u^\epsilon \in C^1([0, T], \mathbf{H}(\epsilon)) \cap C^2([0, T], [L^2(\Omega^\epsilon)]^3) \\ \theta^\epsilon \in C^0([0, T], H(\epsilon)) \cap C^1([0, T], L^2(\Omega^\epsilon)) \end{array} \right.$$

Pour l'établissement de ce résultat, on peut se reporter à Brézis [1983] ou à Blanchard & Francfort [1987].

De ce dernier article, nous reprenons les changements d'échelle sur les inconnues et les données introduits ci-dessous et posons ainsi un nouveau problème sur l'ouvert fixe Ω .

Au vecteur \vec{w}^ϵ défini sur Ω^ϵ , on associe $\vec{w}(\epsilon)$ défini sur Ω par

$$\begin{aligned} \vec{w}_\alpha(\epsilon)(x) &= \vec{w}_\alpha^\epsilon(x^\epsilon) \\ \vec{w}_3(\epsilon)(x) &= \epsilon \vec{w}_3^\epsilon(x^\epsilon) \end{aligned}$$

Au tenseur τ^ϵ défini sur Ω^ϵ , on associe $\tau(\epsilon)$ défini sur Ω par

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta}(\epsilon)(x) &= \tau_{\alpha\beta}^\epsilon(x^\epsilon) \\ \tau_{\alpha 3}(\epsilon)(x) &= \frac{1}{\epsilon} \tau_{\alpha 3}^\epsilon(x^\epsilon) \\ \tau_{3\alpha}(\epsilon)(x) &= \frac{1}{\epsilon} \tau_{3\alpha}^\epsilon(x^\epsilon) \\ \tau_{33}(\epsilon)(x) &= \frac{1}{\epsilon^2} \tau_{33}^\epsilon(x^\epsilon) \end{aligned}$$

Au scalaire Z^ϵ défini sur Ω^ϵ , on associe $Z(\epsilon)$ défini sur Ω par

$$Z(\epsilon)(x) = Z^\epsilon(x^\epsilon)$$

Le problème (1)-(5), après passage à l'ouvert fixe Ω , devient :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} e_{\alpha\beta}(u(\epsilon)) - \alpha\theta(\epsilon)\delta_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{\alpha\beta}(\epsilon) - \frac{\nu}{E}(tr\sigma(\epsilon) + \epsilon^2\sigma_{33}(\epsilon))\delta_{\alpha\beta} \\ e_{\alpha 3}(u(\epsilon)) = \epsilon^2 \frac{1+\nu}{E}\sigma_{\alpha 3}(\epsilon) \\ e_{33}(u(\epsilon)) - \epsilon^2\alpha\theta(\epsilon) = \epsilon^4 \frac{1+\nu}{E}\sigma_{33}(\epsilon) - \frac{\nu}{E}\epsilon^2 (tr\sigma(\epsilon) + \epsilon^2\sigma_{33}(\epsilon)) \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon^2 \rho \ddot{u}_\alpha(\epsilon) = \partial_j \sigma_{\alpha j}(\epsilon) + f_\alpha(\epsilon) \\ \rho \ddot{u}_3(\epsilon) = \partial_j \sigma_{3j}(\epsilon) + \frac{1}{\epsilon^2} f_3(\epsilon) \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega$$

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta \dot{\theta}(\epsilon) = \frac{k}{T_o} (\partial_{\alpha\alpha}\theta(\epsilon) + \frac{1}{\epsilon^2} \partial_{33}\theta(\epsilon)) - \frac{E\alpha}{1-2\nu} (tre(\dot{u}(\epsilon)) \\ + \frac{1}{\epsilon^2} \partial_3 \dot{u}_3(\epsilon)) \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega$$

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\alpha 3}(\epsilon)n_3 = \frac{1}{\epsilon} g_\alpha^\pm(\epsilon) \quad \text{sur } \Gamma^\pm \\ \sigma_{33}(\epsilon)n_3 = \frac{1}{\epsilon^3} g_3^\pm(\epsilon) \quad \text{sur } \Gamma^\pm \\ \frac{k}{\epsilon} \partial_3 \theta(\epsilon)n_3 + \gamma^\epsilon(\theta(\epsilon) - \theta^\pm(\epsilon)) = q^\pm(\epsilon) \quad \text{sur } \Gamma^\pm \\ \theta(\epsilon) = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\ell \\ u(\epsilon) = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\ell \end{array} \right.$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(\epsilon)(0) = u_0(\epsilon) \\ \dot{u}(\epsilon)(0) = v_0(\epsilon) \\ \theta(\epsilon)(0) = \theta_0(\epsilon) \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega$$

Posons

$$\tilde{e}(u(\epsilon)) = \left(\frac{e_{\alpha\beta}(u(\epsilon)) \mid \frac{1}{\epsilon} e_{\alpha 3}(u(\epsilon))}{\frac{1}{\epsilon} e_{3\alpha}(u(\epsilon)) \mid \frac{1}{\epsilon^2} e_{33}(u(\epsilon))} \right)$$

et

$$\tilde{\sigma}(\epsilon) = \left(\frac{\sigma_{\alpha\beta}(\epsilon) \mid \epsilon \sigma_{\alpha 3}(\epsilon)}{\epsilon \sigma_{3\alpha}(\epsilon) \mid \epsilon^2 \sigma_{33}(\epsilon)} \right)$$

On définit les formes bilinéaires \mathcal{A} et \mathcal{B} sur Y par

$$\mathcal{A}(A, B) = \int_{\Omega} \left(\frac{1+\nu}{E} A_{ij} B_{ij} - \frac{\nu}{E} (Tr A)(Tr B) \right) dx$$

$$\mathcal{B}(A, B) = \int_{\Omega} \left(\frac{E}{1+\nu} A_{ij} B_{ij} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (Tr A)(Tr B) \right) dx$$

pour tous A et B éléments de Y .

La formulation variationnelle du système (8)-(12) s'écrit :

$$(13)_a \quad \mathcal{A}(\tilde{\sigma}(\epsilon)(t), \psi) = \int_{\Omega} \tilde{e}_{ij}(u(\epsilon))(t) \psi_{ij} dx - \int_{\Omega} \alpha \theta(\epsilon)(t) Tr \psi dx$$

ou de manière équivalente,

$$(13)_b \quad \mathcal{B}(\tilde{e}(u(\epsilon))(t), \psi) = \int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{ij}(\epsilon)(t) \psi_{ij} dx + \int_{\Omega} \frac{E\alpha}{1-2\nu} \theta(\epsilon)(t) Tr \psi dx$$

pour tout $\psi \in Y$

$$(14) \quad \left| \begin{aligned} & \epsilon^2 \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_{\alpha}(\epsilon)(t) W_{\alpha} dx + \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_3(\epsilon)(t) W_3 dx + \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\epsilon)(t) e_{ij}(W) dx \\ & = \int_{\Omega} f_{\alpha}(\epsilon)(t) W_{\alpha} dx + \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} f_3(\epsilon)(t) W_3 dx + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Gamma_{\pm}} g_{\alpha}^{\pm}(\epsilon)(t) W_{\alpha} dy \\ & + \frac{1}{\epsilon^3} \int_{\Gamma_{\pm}} g_3^{\pm}(\epsilon)(t) W_3 dy \end{aligned} \right.$$

pour tout $(W) \in \mathbf{H}$

$$\begin{aligned}
(15) \quad & \int_{\Omega} \beta \dot{\theta}(\epsilon)(t) Z dx + \frac{k}{T_0} \int_{\Omega} \partial_{\alpha} \theta(\epsilon)(t) \partial_{\alpha} Z dx + \frac{k}{\epsilon^2 T_0} \int_{\Omega} \partial_3 \theta(\epsilon)(t) \partial_3 Z dx \\
& + \frac{E\alpha}{1-2\nu} \int_{\Omega} Tr \tilde{e}(\dot{u}(\epsilon)(t)) Z dx + \frac{\gamma^{\epsilon}}{T_0 \epsilon} \int_{\Gamma^{\pm}} (\theta(\epsilon) - \theta^{\pm}(\epsilon)) Z dy \\
& - \frac{1}{T_0 \epsilon} \int_{\Gamma^{\pm}} q^{\pm}(\epsilon) Z dy = 0
\end{aligned}$$

pour tout $Z \in H$

$$(16) \quad \left| \begin{array}{ll} u(\epsilon)(0) = u_0(\epsilon) \\ \dot{u}(\epsilon)(0) = v_0(\epsilon) \\ \theta(\epsilon)(0) = \theta_0(\epsilon) \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega$$

Les hypothèses (6) deviennent

$$(17) \quad \left| \begin{array}{l} f(\epsilon) \in W^{1,2}(0, T, [L^2(\Omega)]^3) \\ g^{\pm}(\epsilon) \in W^{2,2}(0, T, [L^2(\omega)]^3) \\ \theta^{\pm}(\epsilon) \in L^2(0, T, L^2(\omega)) \\ q^{\pm}(\epsilon) \in L^2(0, T, L^2(\omega)) \\ u_0(\epsilon) \in [H^2(\Omega)]^3 \cap \mathbf{H} \\ v_0(\epsilon) \in \mathbf{H} \\ \theta_0(\epsilon) \in H^2(\Omega) \cap H \end{array} \right.$$

Sous ces hypothèses, le système (13) - (16) admet une solution et une seule $(u(\epsilon), \theta(\epsilon))$ vérifiant

$$(18) \quad \left| \begin{array}{l} u(\epsilon) \in C^1([0, T], \mathbf{H}) \cap C^2([0, T], [L^2(\Omega)]^3) \\ \theta(\epsilon) \in C^1([0, T], H) \cap C^1([0, T], L^2(\Omega)) \end{array} \right.$$

Les notations et le problème ainsi posés, nous étudions la convergence, lorsque ϵ tend vers 0, des termes $u(\epsilon)$ et $\theta(\epsilon)$. Trois cas se distinguent, selon l'hypothèse faite sur le paramètre

γ^ϵ . Nous examinons successivement les situations $\gamma^\epsilon = \epsilon\gamma$, $\gamma^\epsilon = \gamma/\epsilon$ et $\gamma^\epsilon = \gamma$, où γ est une constante indépendante de ϵ . Nous allons voir que les modèles limites auxquels nous aboutissons sont ceux obtenus par l'approche formelle développée dans Lebeltel [1989].

2 Etude de la convergence dans le cas $\gamma^\epsilon = \epsilon\gamma$

Sous des hypothèses de convergence faible sur les données, nous allons, en choisissant des fonctions adéquates dans les équations écrites sous forme variationnelle, obtenir des résultats de convergence faible sur les termes de déplacement, de contraintes et de température vers des quantités solutions d'un problème que nous identifierons.

Puis, si nous supposons que les hypothèses de convergence sur les données sont fortes, nous établirons que les termes inconnus convergent aussi au sens fort à condition, comme dans Blanchard & Francfort [1987], de vérifier une condition de compatibilité sur les valeurs initiales.

Lemme 2.1 (estimations a priori)

On suppose que les hypothèses (17) sont vérifiées.

On suppose de plus que

$$\begin{aligned}
(19) \quad & \left| \begin{array}{lll} u_0(\epsilon) & \rightharpoonup u_0^0 & \text{faiblement dans } \mathbf{H} \\ \epsilon v_{0_\alpha}(\epsilon) & \rightharpoonup v_{0_\alpha}^0 & \text{faiblement dans } L^2(\Omega) \\ v_{0_3}(\epsilon) & \rightharpoonup v_{0_3}^0 & \text{faiblement dans } L^2(\Omega) \\ \tilde{e}(u_0(\epsilon)) & \rightharpoonup \tilde{e}_0^0 & \text{faiblement dans } [L^2(\Omega)]^9 \\ \theta_0(\epsilon) & \rightharpoonup \theta_0^0 & \text{faiblement dans } L^2(\Omega) \\ f_\alpha(\epsilon) & \rightharpoonup f_\alpha^0 & \text{faiblement dans } W^{1,2}(0, T, L^2(\Omega)) \\ \frac{1}{\epsilon^2} f_3(\epsilon) & \rightharpoonup f_3^0 & \text{faiblement dans } W^{1,2}(0, T, L^2(\Omega)) \\ \frac{1}{\epsilon} g_\alpha^\pm(\epsilon) & \rightharpoonup g_\alpha^{\pm 0} & \text{faiblement dans } W^{1,2}(0, T, L^2(\omega)) \\ \frac{1}{\epsilon^3} g_3^\pm(\epsilon) & \rightharpoonup g_3^{\pm 0} & \text{faiblement dans } W^{1,2}(0, T, L^2(\omega)) \\ \frac{1}{\epsilon} q^\pm(\epsilon) & \rightharpoonup q_0^\pm & \text{faiblement dans } L^2(0, T, L^2(\omega)) \\ \theta^\pm(\epsilon) & \rightharpoonup \theta^\pm & \text{faiblement dans } L^2(0, T, L^2(\omega)) \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
(20) \quad & \left| \begin{array}{ll} \tilde{e}(u(\epsilon)) & \text{est borné dans } L^\infty(0, T, [L^2(\Omega)]^9) \\ u(\epsilon) & \text{est borné dans } L^\infty(0, T, \mathbf{H}) \\ \epsilon \dot{u}_\alpha(\epsilon) & \text{est borné dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \\ \dot{u}_3(\epsilon) & \text{est borné dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \\ \theta(\epsilon) & \text{est borné dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T, H) \\ \frac{1}{\epsilon} \partial_3 \theta(\epsilon) & \text{est borné dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \\ \tilde{\sigma}(\epsilon) & \text{est borné dans } L^\infty(0, T, [L^2(\Omega)]^9) \end{array} \right.
\end{aligned}$$

indépendemment de ϵ .

Démonstration :

La régularité des termes $u(\epsilon)$ et $\theta(\epsilon)$ donnée en (18) permet de choisir $\psi = \tilde{e}(\dot{u}(\epsilon))(t)$, $W = \dot{u}(\epsilon)(t)$ et $Z = \theta(\epsilon)$ dans les équations (13)_b, (14) et (15).

On additionne les trois équations et on intègre par rapport au temps sur l'intervalle $[0, t]$, où $0 \leq t \leq T$. On obtient :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \rho \left\{ |\epsilon \dot{u}_{\alpha}(\epsilon)(t)|^2 + |\dot{u}_3(\epsilon)(t)|^2 \right\} dx + \mathcal{B}(\tilde{e}(u(\epsilon)(t)), \tilde{e}(u(\epsilon)(t))) + \int_{\Omega} \beta |\theta(\epsilon)(t)|^2 dx \\
 & + \frac{2k}{T_0} \int_0^t \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha=1}^2 |\partial_{\alpha} \theta(\epsilon)(s)|^2 + \left| \frac{1}{\epsilon} \partial_3 \theta(\epsilon)(s) \right|^2 \right\} dx ds \\
 & + \frac{2\gamma}{T_0} \int_0^t \int_{\Gamma^{\pm}} |\theta(\epsilon)(s)|^2 dy ds = \int_{\Omega} \rho \left\{ |\epsilon v_{0\alpha}(\epsilon)|^2 + |v_{03}(\epsilon)|^2 \right\} dx \\
 & + \mathcal{B}(\tilde{e}(u_0(\epsilon)), \tilde{e}(u_0(\epsilon))) + \int_{\Omega} \beta |\theta_0(\epsilon)|^2 dx \\
 & + 2 \left[\int_{\Omega} \left(f_{\alpha}(\epsilon)(s) u_{\alpha}(\epsilon)(s) + \frac{1}{\epsilon^2} f_3(\epsilon)(s) u_3(\epsilon)(s) \right) dx \right. \\
 & + \left. \int_{\Gamma^{\pm}} \left(\frac{1}{\epsilon} g_{\alpha}^{\pm}(\epsilon)(s) u_{\alpha}(\epsilon)(s) + \frac{1}{\epsilon^3} g_3^{\pm}(\epsilon)(s) u_3(\epsilon)(s) \right) dy \right]_0^t \\
 & - 2 \int_0^t \int_{\Omega} \left(\dot{f}_{\alpha}(\epsilon)(s) u_{\alpha}(\epsilon)(s) + \frac{1}{\epsilon^2} \dot{f}_3(\epsilon)(s) u_3(\epsilon)(s) \right) dx ds \\
 & - 2 \int_0^t \int_{\Gamma^{\pm}} \left(\frac{1}{\epsilon} \dot{g}_{\alpha}^{\pm}(\epsilon)(s) u_{\alpha}(\epsilon)(s) + \frac{1}{\epsilon^3} \dot{g}_3^{\pm}(\epsilon)(s) u_3(\epsilon)(s) \right) dy ds \\
 & + \frac{2}{T_0 \epsilon} \int_0^t \int_{\Gamma^{\pm}} q^{\pm}(\epsilon)(s) \theta(\epsilon)(s) dy ds + \frac{2\gamma}{T_0} \int_0^t \int_{\Gamma^{\pm}} \theta^{\pm}(\epsilon)(s) \theta(\epsilon)(s) dy ds.
 \end{aligned}$$

Les hypothèses (19) entraînent l'existence d'une constante positive C indépendante de ϵ telle que, pour tout ϵ positif,

$$\begin{aligned}
(21) \quad & \sum_{\alpha=1}^2 \|\epsilon \dot{u}_\alpha(\epsilon)\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}^2 + \|\dot{u}_3(\epsilon)\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}^2 \\
& + \|\tilde{e}(u(\epsilon))\|_{L^\infty(0,T,[L^2(\Omega)]^9)}^2 + \|\theta(\epsilon)\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}^2 \\
& + \sum_{\alpha=1}^2 \|\partial_\alpha \theta(\epsilon)\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + \|\frac{1}{\epsilon} \partial_3 \theta(\epsilon)\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 \\
& + \|\theta(\epsilon)\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma^\pm))}^2 \leq C \left[1 + \|u(\epsilon)\|_{L^\infty(0,T,[L^2(\Omega)]^3)} \right. \\
& \left. + \|u(\epsilon)\|_{L^\infty(0,T,[L^2(\Gamma^\pm)]^3)} + \|\theta(\epsilon)\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma^\pm))} \right]
\end{aligned}$$

Grâce aux inégalités de Korn et de Poincaré, cette relation entraîne les estimations sur les champs de déplacement et de température.

Enfin, l'équation (13)_a, où l'on choisit $\psi = \tilde{\sigma}(\epsilon)$, s'écrit

$$\mathcal{A}(\tilde{\sigma}(\epsilon)(t), \tilde{\sigma}(\epsilon)(t)) = \int_{\Omega} \tilde{e}_{ij}(u(\epsilon))(t) \tilde{\sigma}_{ij}(\epsilon)(t) dx - \int_{\Omega} \alpha \theta(\epsilon)(t) \text{Tr} \tilde{\sigma}(\epsilon)(t) dx$$

d'où l'on obtient le résultat de majoration sur $\tilde{\sigma}(\epsilon)$. ■

Le lemme 2.1 nous permet d'extraire des sous-suites de $u(\epsilon)$, $\theta(\epsilon)$, et $\tilde{\sigma}(\epsilon)$ (que nous indiquerons encore par ϵ) qui convergent faiblement vers des limites u° , θ° et $\tilde{\sigma}^\circ$, solutions d'un problème que nous formulons dans le théorème suivant.

Théorème 2.1 (convergence faible)

On suppose que les hypothèses (17) et (19) sont vérifiées.

Alors, on peut extraire des sous-suites telles que, quand ϵ tend vers 0,

$$\begin{array}{llll}
(22) & \left| \begin{array}{lll}
u(\epsilon) & \xrightarrow{*} u^0 & \text{dans } L^\infty(0, T, \mathbf{H}) \\
\epsilon \dot{u}_\alpha(\epsilon) & \xrightarrow{*} 0 & \text{dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \\
\dot{u}_3(\epsilon) & \xrightarrow{*} \dot{u}_3^0 & \text{dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \\
\theta(\epsilon) & \xrightarrow{*} \theta^0 & \text{dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \\
& \rightarrow \theta^0 & \text{dans } L^2(0, T, H) \\
\frac{1}{\epsilon} \partial_3 \theta(\epsilon) & \rightarrow 0 & \text{dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \\
\sigma_{\alpha\beta}(\epsilon) & \xrightarrow{*} \sigma_{\alpha\beta}^0 & \text{dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \\
\tilde{\sigma}_{\alpha 3}(\epsilon) & \xrightarrow{*} \tilde{\sigma}_{\alpha 3}^0 = 0 & \text{dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \\
\tilde{\sigma}_{33}(\epsilon) & \xrightarrow{*} \tilde{\sigma}_{33}^0 = 0 & \text{dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \\
e_{\alpha\beta}(u(\epsilon)) & \xrightarrow{*} e_{\alpha\beta}^0 = \alpha \theta^0 \delta_{\alpha\beta} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{\alpha\beta}^0 - \frac{\nu}{E} \text{tr} \sigma^0 \delta_{\alpha\beta} & \text{dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \\
\tilde{e}_{\alpha 3}(u(\epsilon)) & \xrightarrow{*} \tilde{e}_{\alpha 3}^0 = 0 & \text{dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \\
\tilde{e}_{33}(u(\epsilon)) & \xrightarrow{*} \tilde{e}_{33}^0 = \alpha \theta^0 - \frac{\nu}{E} \text{tr} \sigma^0 & \text{dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega))
\end{array} \right.
\end{array}$$

avec

$$\begin{aligned}
u_\alpha^0 &= \tilde{u}_\alpha^0 - x_3 \partial_\alpha u_3^0 \quad \text{où} \quad \tilde{u}_\alpha^0 \quad \text{appartient à } L^\infty(0, T, H_0^1(\omega)) \\
&\quad \text{et } u_3^0 \quad \text{appartient à } L^\infty(0, T, H_0^2(\omega)).
\end{aligned}$$

Si, de plus, l'on suppose

$$(23) \quad \begin{cases} \partial_\alpha f_\alpha^0 \in W^{1,2}(0, T, L^2(\Omega)) \\ \partial_\alpha g_\alpha^{\pm 0} \in W^{1,2}(0, T, L^2(\omega)) \end{cases}$$

alors u_3^0 est l'unique solution dans $C^0([0, T], H^2(\omega)) \cap C^1([0, T], L^2(\omega))$ du problème :

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\rho\ddot{u}_3^0 + \frac{2E}{3(1-\nu^2)}\Delta^2 u_3^0 = F_3^0 \quad \text{dans } \omega \\ u_3^0 = \partial_n u_3^0 = 0 \quad \text{sur } \partial\omega \\ u_3^0(0) = u_{0_3}^0 \\ \dot{u}_3^0(0) = \frac{1}{2}\overline{v_{0_3}^0} \end{array} \right.$$

$$\text{avec} \quad F_3^0 = \overline{f_3^0} + g_3^{+0} + g_3^{-0} + \overline{x_3 \partial_\alpha f_\alpha^0} + \partial_\alpha (g_\alpha^{+0} - g_\alpha^{-0})$$

et $(\tilde{u}_\alpha^0, \theta^0)$ est l'unique solution dans $C^0([0, T], (H_0^1(\omega))^2 \times L^2(\omega))$ du système :

$$(25) \quad \overline{\sigma_{\alpha\beta}^0} = \frac{2E}{1+\nu} e_{\alpha\beta}(\tilde{u}^0) + \frac{2E\nu}{1-\nu^2} \text{tre}(\tilde{u}^0) \delta_{\alpha\beta} - \frac{2E\alpha}{1-\nu} \theta^0 \delta_{\alpha\beta} \quad \text{dans } \omega$$

$$(26) \quad \partial_\beta \overline{\sigma_{\alpha\beta}^0} + F_\alpha^0 = 0 \quad \text{dans } \omega$$

avec

$$F_\alpha^0 = \overline{f_\alpha^0} + g_\alpha^{+0} + g_\alpha^{-0}$$

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} K\dot{\theta}^0(t) = \frac{k}{T_0} \partial_{\alpha\alpha} \theta^0 - \frac{E\alpha}{1-\nu} \text{tre}(\tilde{u}^0) + \frac{1}{2T_0} (q_0^+ + q_0^-) \\ - \frac{\gamma}{2T_0} (2\theta^0 - \theta^+ - \theta^-) \end{array} \right. \quad \text{dans } \omega$$

$$\text{avec} \quad K = \beta + \frac{E\alpha^2(1+\nu)}{(1-2\nu)(1-\nu)}$$

$$\tilde{u}^0 = 0 \quad \text{sur } \partial\omega$$

$$\theta^0 = 0 \quad \text{sur } \partial\omega$$

$$(28) \quad 2K\theta^0(0) + \frac{2E\alpha}{1-\nu} \text{tre}(\tilde{u}^0)(0) = \beta\overline{\theta_0^0} + \frac{E\alpha}{1-2\nu} \overline{\text{Tre}\tilde{e}_0^0}$$

De plus, la valeur initiale $\tilde{u}^0(0)$ est l'unique solution dans $[H_0^1(\omega)]^2$ de

$$(29) \quad \left| \begin{aligned} & \partial_\beta \left\{ \frac{2E}{1+\nu} e_{\alpha\beta}(\tilde{u}^0(0)) + \left(\frac{2E\nu}{1-\nu^2} + \frac{2}{K} \left(\frac{E\alpha}{1-\nu} \right)^2 \right) \text{tre}(\tilde{u}^0(0)) \delta_{\alpha\beta} \right\} \\ & = \frac{E\alpha}{1-\nu} \frac{1}{K} \partial_\alpha (\beta \bar{\theta}_0^0) + \frac{E\alpha}{1-2\nu} \overline{\text{Tr} \tilde{e}_0^0} - F_\alpha^0(0) \end{aligned} \right|$$

Remarque 2.1

Les résultats énoncés ci-dessus sont en accord avec ceux de Lebeltel [1989] : la limite du champ de déplacement est du type Kirchhoff-Love et sa composante verticale est solution d'une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre sur ω où intervient l'opérateur biharmonique des plaques et dans laquelle ne figure pas la température. Ses deux composantes horizontales vérifient un système de deux équations d'ordre deux couplées avec la température. La température limite enfin, est solution d'une équation d'évolution parabolique couplant elle aussi les composantes horizontales du déplacement.

Démonstration :

Première étape : calcul de $\tilde{\sigma}_{i3}$

Soient $W(x) \in \mathbf{H}$, $\varphi(t) \in D(0, T)$ et $W^\epsilon(x, t) = \varphi(t)(\epsilon W_\alpha(x), \epsilon^2 W_3(x))$ que l'on choisit comme fonction test dans l'équation (14). En intégrant par rapport à t sur $[0, T]$, il vient :

$$\left| \begin{aligned} & \int_0^T \varphi(t) \left[\epsilon^3 \int_\Omega \rho \ddot{u}_\alpha(\epsilon)(t) W_\alpha dx + \epsilon^2 \int_\Omega \rho \ddot{u}_3(\epsilon)(t) W_3 dx \right. \\ & \quad \left. + \int_\Omega (\epsilon \sigma_{\alpha\beta}(\epsilon)(t) e_{\alpha\beta}(W) + \tilde{\sigma}_{\alpha 3}(\epsilon)(t) (\epsilon \partial_\alpha W_3 + \partial_3 W_\alpha) + \tilde{\sigma}_{33}(\epsilon)(t) \partial_3 W_3) dx \right] dt \\ & = \int_0^T \varphi(t) \left[\epsilon \int_\Omega f_\alpha(\epsilon)(t) W_\alpha dx + \int_\Omega f_3(\epsilon)(t) W_3 dx + \int_{\Gamma^\pm} g_\alpha^\pm(\epsilon)(t) W_\alpha dy \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Gamma^\pm} g_3^\pm(\epsilon)(t) W_3 dy \right] dt \end{aligned} \right|$$

On intègre par parties par rapport à t les deux premiers termes. Les résultats de convergence faible pour des sous-suites déduits des estimations a priori du lemme 2.1 et les hypothèses sur les forces faites en (19) nous permettent d'écrire à la limite quand ϵ tend vers 0 :

$$\int_0^T \varphi(t) \int_\Omega (\tilde{\sigma}_{\alpha 3}^0 \partial_3 W_\alpha + \tilde{\sigma}_{33}^0 \partial_3 W_3) dx dt = 0$$

Le choix de $W_i = \int_0^{x_3} \chi_i(y, z) dz$ où $\chi_i \in D(\Omega)$ entraîne

$$\tilde{\sigma}_{\alpha 3}^0 = \tilde{\sigma}_{33}^0 = 0$$

Deuxième étape : établissement des équations vérifiées par les composantes du déplacement

Soit encore $\varphi(t) \in D(0, T)$, soit $W \in V_{KL}$ et $\varphi(t)W(x)$ la fonction test de l'équation (14).

W_3 est élément de $H_0^2(\omega)$ et il existe (\tilde{W}_α) dans $[H_0^1(\omega)]^2$ tel que $W_\alpha = \tilde{W}_\alpha - x_3 \partial_\alpha W_3$.

On intègre par rapport à t sur $[0, T]$.

Si \tilde{W}_α est nul et W_3 quelconque dans $H_0^2(\omega)$, l'équation se simplifie en :

$$\left| \begin{aligned} & \int_0^T \varphi(t) dt \int_\Omega \left[\epsilon^2 \rho x_3 \partial_\alpha \ddot{u}_\alpha(\epsilon)(t) + \rho \ddot{u}_3(\epsilon)(t) - x_3 \partial_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}(\epsilon)(t) \right] W_3 dx \\ & \left[= \int_0^T \varphi(t) dt \int_\Omega \left(x_3 \partial_\alpha f_\alpha(\epsilon)(t) + \frac{1}{\epsilon^2} f_3(\epsilon)(t) \right) W_3 dx \right. \\ & \left. + \int_\omega \left(\pm \frac{1}{\epsilon} \partial_\alpha g_\alpha^\pm(\epsilon)(t) + \frac{1}{\epsilon^3} g_3^\pm(\epsilon)(t) \right) W_3 dy \right] \end{aligned} \right|$$

ou encore,

$$\left| \begin{aligned} & \int_0^T \varphi(t) dt \int_\omega \left[\overline{\epsilon^2 \rho x_3 \partial_\alpha \ddot{u}_\alpha(\epsilon)(t) + \rho \ddot{u}_3(\epsilon)(t)} \right] W_3 dy \\ & = \int_0^T \varphi(t) dt \int_\omega \left[\overline{x_3 \partial_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}(\epsilon)(t) + x_3 \partial_\alpha f_\alpha(\epsilon)(t)} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\epsilon^2} \overline{f_3(\epsilon)(t)} \pm \frac{1}{\epsilon} \partial_\alpha g_\alpha^\pm(\epsilon)(t) + \frac{1}{\epsilon^3} g_3^\pm(\epsilon)(t) \right] W_3 dy \end{aligned} \right|$$

Le terme $\overline{\epsilon^2 \rho x_3 \partial_\alpha \ddot{u}_\alpha(\epsilon)(t) + \rho \ddot{u}_3(\epsilon)(t)}$ est donc borné dans $L^2(0, T, H^{-2}(\omega))$ indépendamment de ϵ et converge faiblement dans cet espace vers sa limite qui, au sens des distributions est $\rho \ddot{u}_3^0(t)$. Cela donne un sens à l'intégrale $\int_\Omega \rho \ddot{u}_3^0(t) W_3 dx$.

Si $W(x)$ est choisi quelconque dans V_{KL} , l'équation limite obtenue lorsque ϵ tend vers 0 peut alors s'écrire

$$\left| \begin{aligned} & \int_0^T \varphi(t) dt \left[\int_{\Omega} \rho \ddot{u}_3^0(t) W_3 dx + \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^0(t) e_{\alpha\beta}(W) dx \right] \\ & = \int_0^T \varphi(t) dt \left[\int_{\Omega} f_i^0(t) W_i dx + \int_{\Gamma_{\pm}} g_i^{\pm 0}(t) W_i dy \right] \end{aligned} \right|$$

donc, pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$(30) \quad \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_3^0(t) W_3 dx + \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^0(t) e_{\alpha\beta}(W) dx = \int_{\Omega} f_i^0(t) W_i dx + \int_{\Gamma_{\pm}} g_i^{\pm 0}(t) W_i dy$$

Si $W_3 = 0$, cette relation s'écrit

$$\int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^0(t) \partial_{\beta} \tilde{W}_{\alpha} dx = \int_{\Omega} f_{\alpha}^0(t) \tilde{W}_{\alpha} dx + \int_{\Gamma_{\pm}} g_{\alpha}^{\pm 0}(t) \tilde{W}_{\alpha} dy$$

donc, pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$(31) \quad \partial_{\beta} \overline{\sigma_{\alpha\beta}^0(t)} + \overline{f_{\alpha}^0(t)} + g_{\alpha}^{+0}(t) + g_{\alpha}^{-0}(t) = 0 \quad \text{dans } \omega$$

Quand, à la quatrième étape, nous aurons établi des relations entre les tenseurs limites \tilde{e}^0 et $\tilde{\sigma}^0$, (31) pourra se lire comme le couple d'équations qui régit les composantes horizontales du déplacement limite u^0 .

Si $\tilde{W}_{\alpha} = 0$, (30) s'écrit

$$\left| \begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_3^0(t) W_3 dx - \int_{\Omega} x_3 \sigma_{\alpha\beta}^0(t) \partial_{\alpha\beta} W_3 dx \\ & = - \int_{\Omega} x_3 f_{\alpha}^0(t) \partial_{\alpha} W_3 dx + \int_{\Omega} f_3^0(t) W_3 dx \mp \int_{\Gamma_{\pm}} g_{\alpha}^{\pm 0}(t) \partial_{\alpha} W_3 dy + \int_{\Gamma_{\pm}} g_3^{\pm 0}(t) W_3 dy \end{aligned} \right|$$

donc, pour tout $t \in [0, T]$,

$$(32) \quad \overline{\rho \ddot{u}_3^0(t)} - \partial_{\alpha\beta} \overline{x_3 \sigma_{\alpha\beta}^0(t)} = \overline{f_3^0(t)} + \overline{x_3 \partial_{\alpha} f_{\alpha}^0(t)} \pm \partial_{\alpha} g_{\alpha}^{+0}(t) + g_3^{+0}(t) + g_3^{-0}(t)$$

Il suffira de connaître $\sigma_{\alpha\beta}^0$ en fonction de $e_{\alpha\beta}(u^0)$ pour lire (32) comme l'équation énoncée en (24).

Troisième étape : obtention des conditions initiales de u_3^0

Nous avons établi que $\overline{\ddot{u}_3^0}$ est élément de $L^2(0, T, H^{-2}(\omega))$. Par conséquent, $\overline{\dot{u}_3^0}$ est élément de $W^{1,2}(0, T, H^{-2}(\omega))$ et admet une trace dans $H^{-2}(\omega)$ en $t = 0$, que nous calculons dans la suite.

Soient $W(x) \in V_{KL}$, $\eta(t) \in C_0^\infty([0, s]) = \{\varphi \in C^\infty([0, s]) \mid \text{supp } \varphi \subset [0, s[] \}$ et $W(x)\eta(t)$ la fonction test que l'on choisit dans l'équation (14).

On intègre par rapport à t sur $[0, s]$ avant de passer à la limite quand ϵ tend vers 0.

Le premier terme $\int_0^s \eta(t) dt \int_\Omega \epsilon^2 \rho \ddot{u}_\alpha(\epsilon)(t) W_\alpha dx$, qu'on intègre par parties par rapport à t , tend vers 0.

Le deuxième terme devient

$$- \int_0^s \dot{\eta}(t) dt \int_\Omega \rho \dot{u}_3(\epsilon)(t) W_3 dx - \eta(0) \int_\Omega \rho v_{0_3}(\epsilon) W_3 dx$$

L'équation limite que l'on obtient s'écrit alors

$$(33) \quad \left| \begin{aligned} & - \int_0^s \dot{\eta}(t) dt \int_\Omega \rho \dot{u}_3^0(t) W_3 dx - \eta(0) \int_\Omega \rho v_{0_3}^0 W_3 dx \\ & + \int_0^s \eta(t) dt \int_\Omega \sigma_{\alpha\beta}^0(t) e_{\alpha\beta}(W) dx = \\ & \int_0^s \eta(t) dt \left[\int_\Omega f_i^0(t) W_i dx + \int_{\Gamma_\pm} g_i^{\pm 0}(t) W_i dy \right] \end{aligned} \right|$$

Dans ce passage à la limite, le choix de $W(x)$ dans l'espace V_{KL} était nécessaire pour éliminer les termes en $\sigma_{\alpha 3}(\epsilon)$ et $\sigma_{33}(\epsilon)$ pour lesquels nous n'avons pas de résultat de convergence.

Multiplions (30) par $\eta(t)$ et intégrons par rapport à t sur $[0, s]$. Il vient :

$$(34) \quad \left| \begin{aligned} & - \int_0^s \dot{\eta}(t) dt \int_\Omega \rho \dot{u}_3^0(t) W_3 dx - \eta(0) \rho < \overline{\dot{u}_3^0}(0), W_3 >_{H^{-2}(\omega), H_0^2(\omega)} \\ & + \int_0^s \eta(t) dt \int_\Omega \sigma_{\alpha\beta}^0(t) e_{\alpha\beta}(W) dx = \int_0^s \eta(t) dt \left[\int_\Omega f_i^0(t) W_i dx + \int_{\Gamma_\pm} g_i^{\pm 0}(t) W_i dy \right] \end{aligned} \right|$$

En comparant (33) et (34), on obtient

$$\eta(0) \int_\Omega \rho v_{0_3}^0 W_3 dx = \eta(0) \rho < \overline{\dot{u}_3^0}(0), W_3 >_{H^{-2}(\omega), H_0^2(\omega)},$$

d'où l'on déduit, avec $\eta(0) \neq 0$ et W_3 quelconque dans $H_0^2(\omega)$,

$$(35) \quad \overline{\dot{u}_3^0}(0) = \overline{v_{0_3}^0}$$

La condition initiale sur u_3^0 s'obtient plus simplement.

En effet, grâce à la convergence faible $*$ de $u_3(\epsilon)$ vers u_3^0 dans $W^{1,\infty}(0, T, L^2(\Omega))$ et à l'injection continue de $W^{1,\infty}(0, T, L^2(\Omega))$ dans $C^0(0, T, L^2(\Omega))$, on a

$$u_3(\epsilon)(0) \rightharpoonup u_3^0(0) \text{ dans } L^2(\Omega)$$

or,

$$u_3(\epsilon)(0) = u_{0_3}(\epsilon) \rightharpoonup u_{0_3}^0 \text{ dans } L^2(\Omega)$$

De l'unicité de la limite, on déduit

$$(36) \quad u_3^0(0) = u_{0_3}^0$$

Quatrième étape : établissement des relations entre les tenseurs \tilde{e}^0 et $\tilde{\sigma}^0$, décomposition et conditions limites du champ u^0

Considérons la loi de comportement (13)_a et faisons tendre ϵ vers 0.

La relation limite s'écrit, pour presque tout t et quel que soit ψ élément de Y :

$$\mathcal{A}(\tilde{\sigma}^0(t), \psi) = \int_{\Omega} \tilde{e}_{ij}^0(t) \psi_{ij} dx - \int_{\Omega} \alpha \theta^0(t) \text{Tr} \psi dx$$

En identifiant les composantes de ψ et en tenant compte de $\tilde{\sigma}_{i3}^0 = 0$, il vient :

$$(37) \quad e_{\alpha\beta}^0 = e_{\alpha\beta}(u^0) = \alpha \theta^0 \delta_{\alpha\beta} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{\alpha\beta}^0 - \frac{\nu}{E} \text{tr} \sigma^0 \delta_{\alpha\beta}$$

$$(38) \quad \tilde{e}_{\alpha 3}^0 = 0$$

$$(39) \quad \tilde{e}_{33}^0 = \alpha \theta^0 - \frac{\nu}{E} \text{tr} \tilde{\sigma}^0$$

La convergence des composantes $\tilde{e}_{\alpha 3}(u(\epsilon))$ et $\tilde{e}_{33}(u(\epsilon))$ entraîne a fortiori

$$e_{\alpha 3}(u^0) = e_{33}(u^0) = 0$$

donc $u^0 \in L^\infty(0, T, V_{KL})$, c'est à dire $u_3^0 \in L^\infty(0, T, H_0^2(\omega))$ et il existe $\tilde{u}_\alpha^0 \in L^\infty(0, T, H_0^1(\omega))$ tel que $u_\alpha^0 = \tilde{u}_\alpha^0 - x_3 \partial_\alpha u_3^0$.

La convergence faible dans $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ de $\frac{1}{\epsilon} \partial_3 \theta(\epsilon)$ entraîne

$$\partial_3 \theta^0(t) = 0 \text{ pour presque tout } t \in [0, T]$$

donc $\theta^\circ \in L^2(0, T, L^2(\omega))$ et la relation (25) est une conséquence immédiate de (37).

Cinquième étape : établissement de l'équation et de la condition limite vérifiées par θ°

Nous avons établi au lemme 2.1 que la suite $\frac{1}{\epsilon} \partial_3 \theta(\epsilon)$ est bornée dans $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ indépendamment de $\epsilon > 0$. Par conséquent, elle admet dans cet espace une sous-suite convergeant vers une limite Δ° .

Multiplions l'équation d'estimation de l'énergie (15) par $\epsilon \varphi(t)$, où $\varphi(t) \in D(0, T)$, et intégrons sur $[0, T]$.

En intégrant par parties par rapport à t les termes en $\dot{\theta}(\epsilon)(t)$ et $Tr \tilde{e}(\dot{u}(\epsilon))(t)$, il résulte du passage à la limite quand ϵ tend vers 0, la relation :

$$\frac{k}{T_0} \int_0^T \varphi(t) dt \int_\Omega \Delta^\circ(t) \partial_3 Z dx = 0$$

donc, pour presque tout $t \in [0, T]$ et quel que soit $Z \in H$,

$$\int_\Omega \Delta^\circ(t) \partial_3 Z dx = 0.$$

Le choix de $Z = \int_0^{x_3} \chi(y, z) dz$ où $\chi \in D(\Omega)$ entraîne

$$\Delta^\circ(t) = 0.$$

Soit à présent $Z \in H_0^1(\omega)$ dans l'équation (15), que nous multiplions par $\varphi(t) \in D(0, T)$ puis intégrons sur $[0, T]$ pour écrire :

$$(40) \quad \left| \begin{aligned} & \int_0^T \varphi(t) dt \int_\omega \left(\beta \dot{\theta}(\epsilon)(t) + \frac{E\alpha}{1-2\nu} Tr \tilde{e}(\dot{u}(\epsilon)(t)) \right) Z dy \\ & = \int_0^T \varphi(t) dt \int_\omega \left(\frac{k}{T_0} \overline{\partial_{\alpha\alpha} \theta(\epsilon)(t)} - \frac{\gamma}{T_0} (\theta(\epsilon)(t) - \theta^\pm(\epsilon)(t)) + \frac{1}{T_0 \epsilon} q^\pm(\epsilon)(t) \right) Z dy \end{aligned} \right|$$

Grâce aux hypothèses et conclusions du lemme 2.1, on déduit que le terme

$$\beta \dot{\theta}(\epsilon)(t) + \frac{E\alpha}{1-2\nu} Tr \tilde{e}(\dot{u}(\epsilon)(t)) \text{ est borné dans } L^2(0, T, H^{-1}(\omega))$$

indépendamment de ϵ et donc converge dans cet espace vers une limite qui, au sens des distributions est

$$2\beta \dot{\theta}^0(t) + \frac{E\alpha}{1-2\nu} \overline{Tr \dot{\tilde{e}}^0(t)}.$$

Cela donne un sens à l'expression $\int_\omega (2\beta \dot{\theta}^0(t) + \frac{E\alpha}{1-2\nu} \overline{Tr \dot{\tilde{e}}^0(t)}) Z dy$ et permet d'écrire, lorsque l'on passe à la limite dans (40) :

$$\left| \int_0^T \varphi(t) dt \left[\int_{\omega} (2\beta \dot{\theta}^0(t) + \frac{E\alpha}{1-2\nu} \overline{Tre^0(t)}) Z dy - \frac{2k}{T_0} \int_{\omega} \partial_{\alpha\alpha} \theta^0(t) Z dy \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\gamma}{T_0} \int_{\omega} (2\theta^0(t) - \theta^+(t) - \theta^-(t)) Z dy - \frac{1}{T_0} \int_{\omega} (q_0^+(t) + q_0^-(t)) Z dy \right] = 0 \right.$$

donc, pour presque tout $t \in [0, T]$ et quel que soit $Z \in H_0^1(\omega)$,

$$(41) \quad \left| \int_{\omega} (2\beta \dot{\theta}^0(t) + \frac{E\alpha}{1-2\nu} \overline{Tre^0(t)}) Z dy - \frac{2k}{T_0} \int_{\omega} \partial_{\alpha\alpha} \theta^0(t) Z dy \right. \\ \left. + \frac{\gamma}{T_0} \int_{\omega} (2\theta^0(t) - \theta^+(t) - \theta^-(t)) Z dy - \frac{1}{T_0} \int_{\omega} (q_0^+(t) + q_0^-(t)) Z dy = 0 \right.$$

Pour presque tout $t \in [0, T]$, on a donc

$$\beta \dot{\theta}^0(t) = \frac{k}{T_0} \partial_{\alpha\alpha} \theta^0(t) - \frac{E\alpha}{2(1-2\nu)} \overline{Tre^0(t)} - \frac{\gamma}{2T_0} (2\theta^0(t) - \theta^+(t) - \theta^-(t)) + \frac{1}{2T_0} (q_0^+(t) + q_0^-(t))$$

d'où, grâce aux relations (37) et (38), on déduit exactement l'équation (27).

Remarquons que la restriction $Z \in H_0^1(\omega)$ dans l'équation (15) était nécessaire pour éliminer le terme $\frac{1}{2} \partial_3 \theta(\epsilon)$ pour lequel nous n'avons aucun résultat de convergence.

Enfin, la condition limite

$$\theta^0 = 0 \text{ sur } \partial\omega$$

est une conséquence immédiate de la convergence faible de $\theta(\epsilon)$ dans $L^2(0, T, H)$.

Il ne reste plus qu'à établir la relation portant sur la condition initiale de la température limite θ^0 . C'est l'objet de notre prochaine étape.

Sixième étape : établissement de la condition initiale de θ^0

Grâce à l'équation (27), le terme $K\theta^0 + \frac{E\alpha}{1-\nu} tre(\tilde{u}^0)$ est élément de $W^{1,2}(0, T, H^{-1}(\omega))$.

Il admet donc une trace dans $H^{-1}(\omega)$ en $t=0$, que nous calculons.

Soit $Z \in H_0^1(\omega)$ la fonction test de l'équation (15), que nous multiplions par $\eta(t) \in C_0^\infty([0, s])$ puis intégrons sur $[0, s]$.

On intègre par parties par rapport à t les termes $\dot{\theta}(\epsilon)(t)$ et $Tr\tilde{e}(\dot{u}(\epsilon)(t))$ puis on passe à la limite quand ϵ tend vers 0 pour obtenir :

$$(42) \quad \left| \begin{aligned} & - \int_0^s \dot{\eta}(t) dt \int_{\omega} 2\beta\theta^0(t) Z dy - \eta(0) \int_{\omega} \beta\bar{\theta}_0^0 Z dy + \frac{2k}{T_0} \int_0^s \eta(t) dt \int_{\omega} \partial_{\alpha}\theta^0(t) \partial_{\alpha} Z dy \\ & - \frac{E\alpha}{1-2\nu} \int_0^s \dot{\eta}(t) dt \int_{\omega} \overline{Tr\tilde{e}^0(t)} Z dy - \frac{E\alpha}{1-2\nu} \eta(0) \int_{\omega} \overline{Tr\tilde{e}_0^0} Z dy \\ & + \frac{\gamma}{T_0} \int_0^s \eta(t) dt \int_{\omega} (2\theta^0(t) - \theta^+(t) - \theta^-(t)) Z dy \\ & - \frac{1}{T_0} \int_0^s \eta(t) dt \int_{\omega} (q_0^+(t) + q_0^-(t)) Z dy = 0 \end{aligned} \right|$$

Multiplions (41) par $\eta(t)$ et intégrons sur $[0, s]$ en intégrant par parties le premier terme. Il vient :

$$(43) \quad \left| \begin{aligned} & - \int_0^s \dot{\eta}(t) dt \int_{\omega} \left(2\beta\theta^0(t) + \frac{E\alpha}{1-2\nu} \overline{Tr\tilde{e}^0(t)} \right) Z dy \\ & - \eta(0) \left(2\beta\theta^0 + \frac{E\alpha}{1-2\nu} \overline{Tr\tilde{e}^0} \right) (0), Z >_{H^{-1}(\omega), H_0^1(\omega)} - \frac{2k}{T_0} \int_0^s \eta(t) dt \\ & \int_{\omega} \partial_{\alpha}\theta^0(t) Z dy + \frac{\gamma}{T_0} \int_0^s \eta(t) dt \int_{\omega} (2\theta^0(t) - \theta^+(t) - \theta^-(t)) Z dy \\ & - \frac{1}{T_0} \int_0^s \eta(t) dt \int_{\omega} (q_0^+(t) + q_0^-(t)) Z dy = 0 \end{aligned} \right|$$

Comparons (42) et (43) pour écrire :

$$\eta(0) \int_{\omega} (\beta\bar{\theta}_0^0 + \frac{E\alpha}{1-2\nu} \overline{Tr\tilde{e}_0^0}) Z dy = \eta(0) \left(2\beta\theta^0 + \frac{E\alpha}{1-2\nu} \overline{Tr\tilde{e}^0} \right) (0), Z >_{H^{-1}(\omega), H_0^1(\omega)}$$

Dans cette relation, $\eta(0)$ est un scalaire quelconque et Z est arbitraire dans $H_0^1(\omega)$.

On déduit :

$$(2\beta\theta^0 + \frac{E\alpha}{1-2\nu} \overline{Tr\tilde{e}^0})(0) = \beta\bar{\theta}_0^0 + \frac{E\alpha}{1-2\nu} \overline{Tr\tilde{e}_0^0}$$

c'est à dire exactement la relation (28), grâce à (37) et (39).

Septième étape : régularité des termes limites

Elle se déduit de Blanchard & Francfort [1987] où le problème qui régit u_3^0 est identique au nôtre et celui qui concerne (\tilde{u}^0, θ^0) ne se distingue qu'à une perturbation linéaire près du système d'équations établi en (25) - (27).

La régularité est alors suffisante pour écrire les équations (25) et (26) à l'instant $t = 0$.

Compte tenu de (28), nous obtenons immédiatement (29), ce qui achève la démonstration de ce théorème. ■

Nous avons ainsi établi la convergence faible des quantités inconnues vers des valeurs limites solutions d'un problème que nous avons identifié. Le déplacement limite u^0 est un champ de Kirchhoff-Love, ainsi que le fournissent les modèles habituels de plaque élastique.

Nous nous intéressons maintenant à la convergence forte; c'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 2.2 (convergence forte)

On suppose que les données satisfont (17) et (23) et que toutes les hypothèses de convergence faible de (19) deviennent des hypothèses de convergence forte.

Alors, les sous-suites extraites au théorème précédent sont telles que, quand ϵ tend vers 0,

$$\begin{aligned}
(44) \quad & \left. \begin{array}{lll}
u(\epsilon) & \longrightarrow u^0 & \text{dans } L^2(0, T, \mathbf{H}) \\
\epsilon \dot{u}_\alpha(\epsilon) & \longrightarrow 0 & \text{dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \\
\dot{u}_3(\epsilon) & \longrightarrow \dot{u}_3^0 & \text{dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \\
\theta(\epsilon) & \longrightarrow \theta^0 & \text{dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \\
\sqrt{T-t} \partial_\alpha \theta(\epsilon) & \longrightarrow \sqrt{T-t} \partial_\alpha \theta^0 & \text{dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \\
\frac{\sqrt{T-t}}{\epsilon} \partial_3 \theta(\epsilon) & \longrightarrow 0 & \text{dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \\
\sigma_{\alpha\beta}(\epsilon) & \longrightarrow \sigma_{\alpha\beta}^0 & \text{dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \\
\tilde{\sigma}_{\alpha 3}(\epsilon) & \longrightarrow 0 & \text{dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \\
\tilde{\sigma}_{33}(\epsilon) & \longrightarrow 0 & \text{dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \\
e_{\alpha\beta}(u(\epsilon)) & \longrightarrow e_{\alpha\beta}^0 & \text{dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \\
\tilde{e}_{\alpha 3}(u(\epsilon)) & \longrightarrow 0 & \text{dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \\
\tilde{e}_{33}(u(\epsilon)) & \longrightarrow \alpha \theta^0 - \frac{\nu}{E} \text{tr} \sigma^0 & \text{dans } L^2(0, T, L^2(\Omega))
\end{array} \right\}
\end{aligned}$$

si et seulement si on a la condition de compatibilité suivante :

$$\begin{aligned}
(45) \quad & \left| \int_{\omega} \left[\rho \left(\frac{\overline{v_{0_3}^0}^2}{2} - |v_0^0|^2 \right) + (2K |\theta^0(0)|^2 - \beta |\overline{\theta_0^0}|^2) - 2F_\alpha^0(0)(\tilde{u}_\alpha^0(0) - \tilde{u}_{0_\alpha}^0) \right] dy \right. \\
& \left. + \mathcal{B}_0(e(u^0(0)), e(u^0(0))) - \mathcal{B}(\tilde{e}_0^0, \tilde{e}_0^0) = 0 \right.
\end{aligned}$$

où $\tilde{u}_{0_\alpha}^0$ apparaît dans la décomposition $u_{0_\alpha}^0 = \tilde{u}_{0_\alpha}^0 - x_3 \partial_\alpha u_{0_3}^0$
avec $\tilde{u}_{0_\alpha}^0 \in H_0^1(\omega)$ et $u_{0_3}^0 \in H_0^2(\omega)$, licite grâce aux hypothèses de convergence sur $u_0(\epsilon)$ et $\tilde{e}(u_0(\epsilon))$ qui entraînent $u_0^0 \in V_{KL}$ et \mathcal{B}_0 est la forme bilinéaire définie sur Y par

$$\mathcal{B}_0(A, B) = \int_{\Omega} \left[\frac{E}{1+\nu} A_{ij} B_{ij} + \frac{E\nu}{1-\nu^2} (\text{tr} A)(\text{tr} B) \right] dx$$

pour tous éléments A, B de Y .

Démonstration :

Nous ne la détaillons pas car la même méthode que celle utilisée dans Blanchard & Francfort [1987], basée sur la convergence des normes dans l'espace de Hilbert $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ s'applique ici et le déroulement des calculs est analogue. Seul s'ajoute le terme $\frac{1}{T_0}(q_0^+ + q_0^-) - \frac{\gamma}{2T_0}(2\theta^0 - \theta^+ - \theta^-)$ qui intervient dans l'équation (27) mais il s'élimine par différence quand nous formons la condition de compatibilité; celle-ci est donc la même que dans l'article sus-cité. ■

Comme nous l'avions annoncé, nous obtenons, sous des hypothèses de même nature sur les données, la convergence forte du champ de déplacement, de la température et des composantes planes du tenseur des contraintes vers des quantités solutions régulières de deux problèmes.

Le premier est un problème évolutif du second ordre par rapport au temps, vérifié par la composante verticale du déplacement, dans lequel on retrouve l'opérateur biharmonique classique des équations de plaques. Le second est un système couplant les composantes planes du déplacement et la température en deux équations quasi-statiques faisant apparaître l'opérateur de l'élasticité linéarisée et une équation d'évolution parabolique.

Pour traiter ce cas, $\gamma^\epsilon = \epsilon\gamma$, on a adopté la même démarche que dans Blanchard & Francfort [1987]. Seule est modifiée l'équation d'évolution portant sur la limite θ^0 de la température, à cause des termes supplémentaires introduits dans notre condition aux limites d'échange de chaleur. Mais sous des hypothèses de convergence appropriées, ces termes n'apportent pas de difficulté supplémentaire.

Cependant nous allons voir qu'il n'en est pas de même dans les deux autres cas que nous envisageons : $\gamma^\epsilon = \gamma/\epsilon$ puis $\gamma^\epsilon = \gamma$ qui nous feront adapter notre raisonnement en conséquence. C'est essentiellement dans le cadre fonctionnel où nous les écrirons que nos résultats seront modifiés.

3 Etude de la convergence dans le cas $\gamma^\epsilon = \gamma/\epsilon$

Ce cas est plus délicat que le précédent. La variation en $\frac{1}{\epsilon}$ au lieu de ϵ du paramètre γ^ϵ modifie les estimations a priori établies au lemme 2.1. Celles que nous allons d'abord établir porteront sur les mêmes termes multipliés par ϵ . Puis, grâce à une majoration de $\|\theta(\epsilon)\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}$, nous serons en mesure de formuler de nouvelles estimations sur les fonctions intégrées par rapport au temps des champs $u(\epsilon), \tilde{e}(u(\epsilon)), \tilde{\sigma}(\epsilon)$. Nous pourrions alors en extraire des sous-suites con-

vergeant faiblement vers des termes limites solutions d'un problème que nous formulerons.

Lemme 3.1 (premières estimations a priori)

On suppose que les hypothèses (17) et (19) sont vérifiées. Alors,

$$(46) \quad \left| \begin{array}{ll} \theta(\epsilon) & \text{est borné dans } L^2(0, T, L^2(\Gamma^\pm)) \\ \epsilon\theta(\epsilon) & \text{est borné dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \\ \epsilon\partial_\alpha\theta(\epsilon) & \text{est borné dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \\ \partial_3\theta(\epsilon) & \text{est borné dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \\ \epsilon\tilde{e}(u(\epsilon)) & \text{est borné dans } L^\infty(0, T, [L^2(\Omega)]^9) \\ \epsilon u(\epsilon) & \text{est borné dans } L^\infty(0, T, \mathbf{H}) \\ \epsilon^2\dot{u}_\alpha(\epsilon) & \text{est borné dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \\ \epsilon\dot{u}_3(\epsilon) & \text{est borné dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \\ \epsilon\tilde{\sigma}(\epsilon) & \text{est borné dans } L^\infty(0, T, [L^2(\Omega)]^9) \end{array} \right.$$

indépendamment de ϵ .

Démonstration :

Il suffit de reprendre l'inégalité (21) qui nous avait permis d'établir les estimations du lemme 2.1. Dans le cas $\gamma^\epsilon = \gamma/\epsilon$, elle devient, en multipliant tous les termes par ϵ^2 :

$$\left| \begin{array}{l} \sum_{\alpha=1}^2 \|\epsilon^2\dot{u}_\alpha(\epsilon)\|_{L^\infty(0, T, L^2(\Omega))}^2 + \|\epsilon\dot{u}_3(\epsilon)\|_{L^\infty(0, T, L^2(\Omega))}^2 + \|\epsilon\tilde{e}(u(\epsilon))\|_{L^\infty(0, T, [L^2(\Omega)]^9)}^2 \\ + \|\epsilon\theta(\epsilon)\|_{L^\infty(0, T, L^2(\Omega))}^2 + \sum_{\alpha=1}^2 \|\epsilon\partial_\alpha\theta(\epsilon)\|_{L^2(0, T, L^2(\Omega))}^2 + \|\partial_3\theta(\epsilon)\|_{L^2(0, T, L^2(\Omega))}^2 \\ + \|\theta(\epsilon)\|_{L^2(0, T, L^2(\Gamma^\pm))}^2 \leq C \left[\epsilon^2 + \epsilon\|\epsilon u(\epsilon)\|_{L^\infty(0, T, [L^2(\Omega)]^3)} \right. \\ \left. + \epsilon\|\epsilon u(\epsilon)\|_{L^\infty(0, T, [L^2(\Gamma^\pm)]^3)} + \|\theta(\epsilon)\|_{L^2(0, T, L^2(\Gamma^\pm))} \right] \end{array} \right.$$

où C est une constante positive indépendante de ϵ .

Grâce aux inégalités de Korn et de Poincaré, on obtient les estimations (46). Comme dans le cas $\gamma^\epsilon = \epsilon\gamma$, celle de $\epsilon\tilde{\sigma}(\epsilon)$ se déduit de la coercivité de la forme bilinéaire \mathcal{A} . ■

Les estimations que nous venons d'établir sont plus pauvres que celles obtenues au lemme 2.1 dans le cas $\gamma^\epsilon = \epsilon\gamma$, exceptées celles qui concernent $\theta(\epsilon)$. Grâce à elles, nous parvenons à un résultat de majoration plus précis sur la température.

Théorème 3.1 (convergence faible de la température)

Sous les hypothèses (17) et (19), il existe une suite extraite $\theta(\epsilon)$ telle que, quand ϵ tend vers 0,

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta(\epsilon) \rightharpoonup \theta^0 = \xi^0 + x_3 \tilde{\xi}^0 \text{ faiblement dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \\ \text{avec } \xi^0 \text{ et } \tilde{\xi}^0 \text{ s'exprimant en fonction des données par} \\ \xi^0 = \frac{\theta^+ + \theta^-}{2} \text{ et } \tilde{\xi}^0 = \frac{\gamma(\theta^+ - \theta^-)}{2(k + \gamma)} \end{array} \right.$$

Démonstration :

Grâce aux résultats établis en (46) sur la température $\theta(\epsilon)$ et à la relation

$$\theta(\epsilon)(x_1, x_2, x_3) = \theta(\epsilon)(x_1, x_2, -1) + \int_{-1}^{x_3} \partial_3 \theta(\epsilon)(x_1, x_2, z) dz$$

valable pour presque tout $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, $\theta(\epsilon)$ est borné dans $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ par une constante indépendante de ϵ , ce qui prouve l'existence d'une limite $\theta^0 \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$ pour une sous-suite de $\theta(\epsilon)$ convergeant faiblement dans cet espace.

Considérons $Z(x) \in H$ dans l'équation (15), que nous multiplions par $\epsilon^2 \varphi(t)$ avec $\varphi(t) \in D(0, T)$ et intégrons sur $[0, T]$.

Les estimations (46) et la convergence faible dans $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ de $\theta(\epsilon)$ vers θ^0 permettent d'écrire à la limite, quand ϵ tend vers 0 :

$$\frac{k}{T_0} \int_0^T \varphi(t) dt \int_{\Omega} \partial_3 \theta^0 \partial_3 Z dx + \frac{\gamma}{T_0} \int_0^T \varphi(t) dt \int_{\Gamma^\pm} (\theta^0 - \theta^\pm) Z dy = 0$$

donc, pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$k \int_{\Omega} \partial_3 \theta^0 \partial_3 Z dx + \gamma \int_{\Gamma^\pm} (\theta^0 - \theta^\pm) Z dy = 0$$

Cette équation, valable quel que soit $Z \in H$, entraîne l'équation

$$\partial_{33}\theta^0 = 0 \text{ presque partout dans } \Omega$$

ainsi que les relations aux bords :

$$\left| \begin{array}{ll} k\partial_3\theta^0 + \gamma(\theta^0 - \theta^+) = 0 & \text{sur } \Gamma^+ \\ -k\partial_3\theta^0 + \gamma(\theta^0 - \theta^-) = 0 & \text{sur } \Gamma^- \end{array} \right.$$

Grâce à ces relations, on obtient la décomposition de θ^0 en

$$\theta^0 = \xi^0 + x_3\tilde{\xi}^0$$

avec ξ^0 et $\tilde{\xi}^0$ données en (47). ■

Le théorème 3.1 nous permet d'énoncer de nouveaux résultats d'estimations a priori qui concernent ici les primitives par rapport au temps des champs qui intervenaient au lemme 2.1.

Lemme 3.2 (estimations a priori sur les termes intégrés)

Sous les hypothèses (17) et (19) ,

$$(48) \quad \left| \begin{array}{ll} \int_0^t \tilde{e}(u(\epsilon))ds & \text{est borné dans } L^\infty(0, T, [L^2(\Omega)]^9) \\ \int_0^t u(\epsilon)ds & \text{est borné dans } L^\infty(0, T, \mathbf{H}) \\ u_3(\epsilon) & \text{est borné dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \\ \epsilon u_\alpha(\epsilon) & \text{est borné dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \\ \int_0^t \tilde{\sigma}(\epsilon)ds & \text{est borné dans } L^\infty(0, T, [L^2(\Omega)]^9) \end{array} \right.$$

indépendamment de ϵ .

Démonstration :

Intégrons par rapport à t l'équation du mouvement donnée en (9). Il vient

$$(49) \quad \epsilon^2 \rho \dot{u}_\alpha(\epsilon)(t) - \partial_j \int_0^t \sigma_{\alpha j}(\epsilon)ds = \int_0^t f_\alpha(\epsilon)ds + \epsilon^2 \rho v_{0\alpha}(\epsilon)$$

$$(50) \quad \rho \dot{u}_3(\epsilon)(t) - \partial_j \int_0^t \sigma_{3j}(\epsilon)ds = \int_0^t \frac{1}{\epsilon^2} f_3(\epsilon)ds + \rho v_{03}(\epsilon)$$

On multiplie ces relations respectivement par $u_\alpha(\epsilon)(t)$ et $u_3(\epsilon)(t)$; on les additionne puis on intègre sur Ω pour écrire :

$$\begin{aligned}
 (51) \quad & \left| \begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \rho \epsilon^2 \int_{\Omega} \frac{d}{dt} |u_\alpha(\epsilon)(t)|^2 dx + \frac{1}{2} \rho \int_{\Omega} \frac{d}{dt} |u_3(\epsilon)(t)|^2 dx \\
 & + \int_{\Omega} \left(\int_0^t \sigma_{\alpha\beta}(\epsilon) ds \right) e_{\alpha\beta}(u(\epsilon))(t) dx \\
 & + 2 \int_{\Omega} \left(\int_0^t \sigma_{\alpha 3}(\epsilon) ds \right) e_{\alpha 3}(u(\epsilon))(t) dx \\
 & + \int_{\Omega} \left(\int_0^t \sigma_{33}(\epsilon) ds \right) e_{33}(u(\epsilon))(t) dx \\
 & = \int_{\Omega} \left[\left(\int_0^t f_\alpha(\epsilon) ds \right) u_\alpha(\epsilon)(t) + \left(\int_0^t \frac{1}{\epsilon^2} f_3(\epsilon) ds \right) u_3(\epsilon)(t) \right] dx \\
 & + \int_{\Gamma^\pm} \left[\left(\int_0^t \frac{1}{\epsilon} g_\alpha^\pm(\epsilon) ds \right) u_\alpha(\epsilon)(t) + \left(\int_0^t \frac{1}{\epsilon^3} g_3^\pm(\epsilon) ds \right) u_3(\epsilon)(t) \right] dy \\
 & + \int_{\Omega} \left(\epsilon^2 \rho v_{0\alpha}(\epsilon) u_\alpha(\epsilon)(t) + \rho v_{03}(\epsilon) u_3(\epsilon)(t) \right) dx
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Intégrons de même par rapport à t la loi de comportement donnée en (8); les relations que l'on obtient entraînent :

$$\begin{aligned}
 (52) \quad & \left| \begin{aligned}
 & \int_0^t \sigma_{\alpha\beta}(\epsilon) ds = \frac{E}{1+\nu} \int_0^t e_{\alpha\beta}(u(\epsilon)) ds + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\int_0^t \text{Tr} \tilde{e}(u(\epsilon)) ds \right) \delta_{\alpha\beta} \\
 & \quad - \frac{E\alpha}{1-2\nu} \left(\int_0^t \theta(\epsilon) ds \right) \delta_{\alpha\beta} \\
 & \int_0^t \tilde{\sigma}_{\alpha 3}(\epsilon) ds = \frac{E}{1+\nu} \int_0^t \tilde{e}_{\alpha 3}(\epsilon) ds \\
 & \int_0^t \tilde{\sigma}_{33}(\epsilon) ds = \frac{E}{1+\nu} \int_0^t \tilde{e}_{33}(u(\epsilon)) ds + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_0^t \text{Tr} \tilde{e}(u(\epsilon)) ds \\
 & \quad - \frac{E\alpha}{1-2\nu} \int_0^t \theta(\epsilon) ds
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

En utilisant (52) et en remarquant que $\tilde{\sigma}_{ij}(\epsilon) \tilde{e}_{ij}(u(\epsilon)) = \sigma_{ij}(\epsilon) e_{ij}(u(\epsilon))$, (51) devient :

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2} \rho \epsilon^2 \int_{\Omega} \frac{d}{dt} |u_{\alpha}(\epsilon)(t)|^2 dx + \frac{1}{2} \rho \int_{\Omega} \frac{d}{dt} |u_3(\epsilon)(t)|^2 dx \right. \\
& \quad + \frac{E}{1+\nu} \int_{\Omega} \left(\int_0^t \tilde{e}_{ij}(u(\epsilon)) ds \right) \tilde{e}_{ij}(u(\epsilon))(t) dx \\
& \quad + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_{\Omega} \left(\int_0^t \text{Tr} \tilde{e}(u(\epsilon)) ds \right) \text{Tr} \tilde{e}(u(\epsilon))(t) dx \\
& \quad = \frac{E\alpha}{1-2\nu} \int_{\Omega} \left(\int_0^t \theta(\epsilon) ds \right) \text{Tr} \tilde{e}(u(\epsilon))(t) dx \\
& \quad + \int_{\Omega} \left[\left(\int_0^t f_{\alpha}(\epsilon) ds \right) u_{\alpha}(\epsilon)(t) + \left(\int_0^t \frac{1}{\epsilon^2} f_3(\epsilon) ds \right) u_3(\epsilon)(t) \right] dx \\
& \quad + \int_{\Gamma^{\pm}} \left[\left(\int_0^t \frac{1}{\epsilon} g_{\alpha}^{\pm}(\epsilon) ds \right) u_{\alpha}(\epsilon)(t) + \left(\int_0^t \frac{1}{\epsilon^3} g_3^{\pm}(\epsilon) ds \right) u_3(\epsilon)(t) \right] dy \\
& \quad \left. + \int_{\Omega} (\epsilon^2 \rho v_{0\alpha}(\epsilon) u_{\alpha}(\epsilon)(t) + \rho v_{03}(\epsilon) u_3(\epsilon)(t)) dx \right.
\end{aligned}$$

On intègre alors cette relation sur $[0, t]$ où $0 \leq t \leq T$, afin d'écrire en (53) l'équation qui va fournir les estimations cherchées.

$$\begin{aligned}
(53) \quad & \left| \frac{1}{2} \rho \epsilon^2 \sum_{\alpha=1}^2 \|u_{\alpha}(\epsilon)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \rho \|u_3(\epsilon)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\
& \quad + \frac{E}{2(1+\nu)} \sum_{i,j} \left\| \int_0^t \tilde{e}_{ij}(u(\epsilon)(s)) ds \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + \frac{E\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \left\| \int_0^t \text{Tr} \tilde{e}(u(\epsilon))(s) ds \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad = \frac{E\alpha}{1-2\nu} \int_0^t ds \int_{\Omega} \left(\int_0^s \theta(\epsilon) \right) \text{Tr} \tilde{e}(u(\epsilon))(s) dx \\
& \quad + \int_0^t ds \int_{\Omega} \left[\left(\int_0^s f_{\alpha}(\epsilon) \right) u_{\alpha}(\epsilon)(s) \right. \\
& \quad + \left. \left(\int_0^s \frac{1}{\epsilon^2} f_3(\epsilon) \right) u_3(\epsilon)(s) \right] dx + \int_0^t ds \int_{\Gamma^{\pm}} \left[\left(\int_0^s \frac{1}{\epsilon} g_{\alpha}^{\pm}(\epsilon) \right) u_{\alpha}(\epsilon)(s) \right. \\
& \quad + \left. \left(\int_0^s \frac{1}{\epsilon^3} g_3^{\pm}(\epsilon) \right) u_3(\epsilon)(s) \right] dy + \int_0^t ds \int_{\Omega} (\epsilon^2 \rho v_{0\alpha}(\epsilon) u_{\alpha}(\epsilon)(s) \\
& \quad + \rho v_{03}(\epsilon) u_3(\epsilon)(s)) dx + \frac{1}{2} \rho \epsilon^2 \sum_{\alpha=1}^2 \|u_{0\alpha}(\epsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \rho \|u_{03}(\epsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 \left. \right|
\end{aligned}$$

Il convient de majorer chaque terme du membre de droite, ce que permet de faire les hypothèses (19) et le résultat établi en (47).

En effet, une intégration par parties par rapport au temps du premier terme entraîne, pour presque tout $t \in [0, T]$:

$$\left| \int_0^t ds \int_{\Omega} \left(\int_0^s \theta(\epsilon) \right) Tr \tilde{e}(u(\epsilon)(s)) dx \right| \leq \int_0^t \|\theta(\epsilon)(s)\|_{L^2(\Omega)} \left\| \int_0^s Tr \tilde{e}(u(\epsilon)) \right\|_{L^2(\Omega)} ds$$

$$+ \left\| \int_0^t \theta(\epsilon)(s) ds \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \int_0^t Tr \tilde{e}(u(\epsilon)(s)) \right\|_{L^2(\Omega)}$$

et $\int_0^t \theta(\epsilon)(s) ds$ est borné dans $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$ indépendamment de ϵ .

On traite de la même manière les autres termes. Si, pour simplifier, l'on adopte les notations :

$$F(\epsilon) = (F_i(\epsilon)) = \begin{pmatrix} f_\alpha(\epsilon) \\ \frac{1}{\epsilon^2} f_3(\epsilon) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G(\epsilon) = (G_i(\epsilon)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon} g_\alpha^\pm(\epsilon) \\ \frac{1}{\epsilon^3} g_3^\pm(\epsilon) \end{pmatrix},$$

les termes $\int_0^t F_i(\epsilon)(s) ds$ et $\int_0^t G_i(\epsilon)(s) ds$ sont bornés respectivement dans $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$ et $L^\infty(0, T, L^2(\Gamma^\pm))$ indépendamment de ϵ et $u_\alpha(\epsilon), \epsilon v_{0_\alpha}(\epsilon), v_{0_3}(\epsilon)$, sont bornés dans $L^2(\Omega)$, ce que l'on déduit des hypothèses (19).

En regroupant toutes ces majorations et en utilisant l'inégalité de Korn, il existe une constante positive C indépendante de ϵ telle que

$$(54) \quad \left| \begin{aligned} & \frac{1}{2} \rho \epsilon^2 \sum_{\alpha=1}^2 \|u_\alpha(\epsilon)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \rho \|u_3(\epsilon)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \frac{E}{2(1+\nu)} \sum_{i,j} \left\| \int_0^t \tilde{e}_{ij}(u(\epsilon))(s) ds \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \frac{E\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \left\| \int_0^t Tr \tilde{e}(u(\epsilon))(s) ds \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C \left\{ 1 + \left\| \int_0^t \tilde{e}(u(\epsilon))(s) ds \right\|_{[L^2(\Omega)]^9} + \int_0^t \left[\|\theta(\epsilon)(s)\|_{L^2(\Omega)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \|F(\epsilon)(s)\|_{[L^2(\Omega)]^3} + \|G(\epsilon)(s)\|_{[L^2(\Gamma^\pm)]^3} \right] \left\| \int_0^s \tilde{e}(u(\epsilon)) \right\|_{[L^2(\Omega)]^9} ds \right\} \end{aligned} \right|$$

Grâce au lemme de Gronwall, on conclut que $\int_0^t \tilde{e}(u(\epsilon))(s)ds$ est borné dans $L^\infty(0, T, [L^2(\Omega)]^9)$. Les autres estimations sont des conséquences de (52) et (53). ■

Corollaire 3.1 (convergence faible)

Si les hypothèses (17) et (19) sont vérifiées, il existe $\tilde{E}^0 \in L^\infty(0, T, [L^2(\Omega)]^9)$, $U^0 \in L^\infty(0, T, \mathbf{H})$, $u_3^0 = \dot{U}_3^0 \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$ (la dérivée étant à lire au sens des distributions), $\tilde{\Sigma}^0 \in L^\infty(0, T, [L^2(\Omega)]^9)$ et des sous-suites tels que, quand ϵ tend vers 0 :

$$(55) \quad \left| \begin{array}{lll} \int_0^t \tilde{e}(u(\epsilon))(s)ds & \rightharpoonup^* \tilde{E}^0 & \text{faiblement dans } L^\infty(0, T, [L^2(\Omega)]^9) \\ \int_0^t u(\epsilon)(s)ds & \rightharpoonup^* U^0 & \text{faiblement dans } L^\infty(0, T, \mathbf{H}) \\ u_3(\epsilon) & \rightharpoonup^* u_3^0 & \text{faiblement dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \\ \epsilon u_\alpha(\epsilon) & \rightharpoonup^* 0 & \text{faiblement dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \\ \int_0^t \tilde{\sigma}(\epsilon)(s)ds & \rightharpoonup^* \tilde{\Sigma}^0 & \text{faiblement dans } L^\infty(0, T, [L^2(\Omega)]^9) \end{array} \right.$$

Démonstration :

Ces résultats sont des conséquences immédiates du lemme 3.2. ■

Remarque 3.1

Les champs qui interviennent au corollaire 3.1 sont des primitives par rapport au temps de ceux qui figurent en (22). En les dérivant au sens des distributions, nous pouvons énoncer le problème vérifié par la limite u^0 du champ $u(\epsilon)$. C'est le propos du théorème suivant qui est à rapprocher du théorème 2.1 établi dans le cas $\gamma^\epsilon = \epsilon\gamma$.

Un fait nouveau est l'apparition d'un terme de température dans l'équation vérifiée par u_3^0 . Cependant, le couplage est artificiel dans la mesure où ce terme est connu explicitement en fonction des données et non plus déterminé, comme au cas précédent, par une équation aux dérivées partielles.

Théorème 3.2 (énoncé du problème limite)

Sous les hypothèses (17), (19) et (23), la limite u_3^0 de la suite extraite $u_3(\epsilon)$ est l'unique solution dans $L^\infty(0, T, L^2(\omega)) \cap W^{1,2}(0, T, H^{-2}(\omega))$ du problème

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\rho\ddot{u}_3^0 + \frac{2E}{3(1-\nu^2)}\Delta^2 u_3^0 + \frac{2\alpha E}{3(1-\nu)}\Delta\xi^0 = F_3^0 \quad \text{dans } L^2(0, T, H^{-4}(\omega)) \\ \text{où } F_3^0 \text{ est défini en (24)} \\ u_3^0 = 0 \quad \text{dans } D'(0, T, H^{3/2}(\partial\omega)) \\ \partial_n u_3^0 = 0 \quad \text{dans } D'(0, T, H^{1/2}(\partial\omega)) \\ u_3^0(0) = u_{0_3}^0 \\ \dot{u}_3^0(0) = \frac{1}{2}\overline{v_{0_3}^0} \end{array} \right.$$

le champ $u_\alpha(\epsilon)$ converge au sens des distributions vers $u_\alpha^0 = \dot{U}_\alpha^0$ qui admet la décomposition

$$u_\alpha^0 = \tilde{u}_\alpha^0 - x_3 \partial_\alpha u_3^0$$

et \tilde{u}_α^0 est l'unique solution du problème

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists \tilde{U}^0 \in L^\infty(0, T, [H_0^1(\omega)]^2) \text{ t.q. } \tilde{u}_\alpha^0 = \dot{\tilde{U}}_\alpha^0 \\ \frac{2E}{1+\nu} \partial_\beta e_{\alpha\beta}(\tilde{u}^0) + \frac{2E\nu}{1-\nu^2} \partial_\alpha \text{tr}(\tilde{u}^0) - \frac{2\alpha E}{1-\nu} \partial_\alpha \xi^0 + F_\alpha^0 = 0 \quad \text{dans } D'((0, T) \times \omega) \\ \text{où } F_\alpha^0 \text{ est défini en (26)} \end{array} \right.$$

De plus, on a les relations

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_{\alpha\beta}^0 = e_{\alpha\beta}(U^0) = \alpha \left(\int_0^t \theta^0(s) ds \right) \delta_{\alpha\beta} + \frac{1+\nu}{E} \tilde{\Sigma}_{\alpha\beta}^0 - \frac{\nu}{E} \text{tr} \tilde{\Sigma}^0 \delta_{\alpha\beta} \\ \tilde{E}_{\alpha 3}^0 = 0 \\ \tilde{E}_{33}^0 = \alpha \int_0^t \theta^0(s) ds - \frac{\nu}{E} \text{tr} \tilde{\Sigma}^0 \end{array} \right.$$

et

$$(59) \quad \tilde{\Sigma}_{\alpha 3}^0 = \tilde{\Sigma}_{33}^0 = 0$$

Démonstration :

Notre démarche, tout d'abord, sera très voisine de celle suivie dans le cas $\gamma^\epsilon = \epsilon\gamma$ pour prouver le théorème 2.1. Toutefois, ce sont ici les formes intégrées par rapport au temps de la loi de comportement et de l'équation du mouvement que nous allons considérer. Nous en déduirons les problèmes vérifiés par les termes limites et pourrons étudier l'unicité de leur solution.

Première étape : calcul de $\tilde{\Sigma}_{i3}^0$

Soient $W(x) \in \mathbf{H}$ et $\varphi(t) \in D(0, T)$.

On multiplie (49) par $\epsilon\varphi(t)W_\alpha(x)$ et on intègre sur $\Omega \times (0, T)$.

Les convergences établies au corollaire 3.1 et les hypothèses sur les forces faites en (19) entraînent la relation limite, quand ϵ tend vers 0 :

$$\int_0^T \varphi(t) dt \int_\Omega \tilde{\Sigma}_{\alpha 3}^0 \partial_3 W_\alpha dx = 0$$

Il suffit de choisir $W_\alpha = \int_0^{x_3} \chi_\alpha(y, z) dz$ avec χ_α variant arbitrairement dans $D(\Omega)$ pour obtenir

$$(60) \quad \tilde{\Sigma}_{33}^0 = 0$$

Si l'on multiplie (50) par $\epsilon^2\varphi(t)W_3(x)$, le même raisonnement entraîne

$$(61) \quad \tilde{\Sigma}_{33}^0 = 0$$

Deuxième étape : établissement des relations entre les tenseurs \tilde{E}^0 et $\tilde{\Sigma}^0$

On intègre la loi de comportement (13)_a sur $[0, t]$ où $t \in [0, T]$. Alors, pour tout ψ élément de Y ,

$$\mathcal{A}\left(\int_0^t \tilde{\sigma}(\epsilon)(s) ds, \psi\right) = \int_\Omega \left(\int_0^t \tilde{e}_{ij}(u(\epsilon))(s) ds\right) \psi_{ij} dx - \int_\Omega \alpha \left(\int_0^t \theta(\epsilon)(s) ds\right) \text{Tr } \psi dx$$

Si l'on fait tendre ϵ vers 0, on obtient la relation limite, valable pour presque tout $t \in [0, T]$ et quel que soit $\psi \in Y$:

$$(62) \quad \mathcal{A}(\tilde{\Sigma}^0, \psi) = \int_\Omega \tilde{E}_{ij}^0 \psi_{ij} dx - \int_\Omega \alpha \left(\int_0^t \theta^0(s) ds\right) \text{Tr } \psi dx$$

En identifiant les composantes de ψ et en tenant compte de $\tilde{\Sigma}_{i3}^0 = 0$, on obtient exactement les relations (58).

Troisième étape : décomposition des champs U^0 et u^0

La convergence des composantes $\int_0^t \tilde{e}_{i3}(u(\epsilon))(s)ds$ entraîne a fortiori

$$e_{\alpha 3}(U^0) = e_{33}(U^0) = 0$$

donc $U^0 \in L^\infty(0, T, V_{KL})$, c'est à dire que $U_3^0 \in L^\infty(0, T, H_0^2(\omega))$ et il existe $U_\alpha^0 \in L^\infty(0, T, H_0^1(\omega))$ tel que

$$U_\alpha^0 = \tilde{U}_\alpha^0 - x_3 \partial_\alpha U_3^0$$

On pose $u^0 = \dot{U}^0$ et, avec des notations évidentes, $u_\alpha^0 = \tilde{u}_\alpha^0 - x_3 \partial_3 u_3^0$
 $u(\epsilon)$ converge au sens des distributions vers u^0 lorsque ϵ tend vers 0.

Enfin, de la convergence $u_3(\epsilon) \xrightarrow{*} u_3^0$ dans l'espace $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$, on déduit $u_3^0 \in L^\infty(0, T, L^2(\omega))$.

Quatrième étape : établissement de l'équation et des conditions limites vérifiées par u_3^0

On considère $\varphi(t) \in \mathcal{D}(0, T)$, $W(x) \in V_{KL}$ et on multiplie (49) et (50) respectivement par $\varphi(t)W_\alpha(x)$ et $\varphi(t)W_3(x)$. Puis on intègre sur $\Omega \times (0, T)$ et on additionne les deux équations.

Suivant notre démarche habituelle, les convergences établies en (55) nous permettent de passer à la limite quand ϵ tend vers 0 et d'écrire l'équation

$$(63) \quad \left| \begin{aligned} & -\rho \int_0^T \dot{\varphi}(t)dt \int_\Omega u_3^0 W_3 dx + \int_0^T \varphi(t)dt \int_\Omega \tilde{\Sigma}_{\alpha\beta}^0 \partial_\beta W_\alpha dx \\ & = \int_0^T \varphi(t)dt \left[\int_\Omega \left(\int_0^t f_i^0 \right) W_i dx + \int_{\Gamma^\pm} \left(\int_0^t g^{\pm 0} \right) W_\alpha dy + \int_\Omega \rho v_{03}^0 W_3 dx \right] \end{aligned} \right|$$

W_3 est élément de $H_0^2(\omega)$ et il existe (\tilde{W}_α) dans $[H_0^1(\omega)]^2$ tel que

$$W_\alpha = \tilde{W}_\alpha - x_3 \partial_\alpha W_3$$

Si l'on choisit $\tilde{W}_\alpha = 0$, (63) devient

$$\begin{aligned}
& \left| -2\rho \int_0^T \dot{\varphi}(t) dt \int_{\omega} u_3^0 W_3 dy - \int_0^T \varphi(t) dt \int_{\omega} \overline{x_3 \tilde{\Sigma}_{\alpha\beta}^0} \partial_{\alpha\beta} W_3 dy \right. \\
& \quad = \int_0^T \varphi(t) dt \int_{\omega} \overline{x_3 \int_0^t \partial_{\alpha} f_{\alpha}^0 + \int_0^t \partial_{\alpha} (g_{\alpha}^{+0} - g_{\alpha}^{-0})} \\
& \quad \quad \left. + \int_0^t \overline{f_3^0} + \int_0^t (g_3^{+0} + g_3^{-0}) + \overline{\rho v_{0_3}^0} \right) W_3 dy
\end{aligned}$$

W_3 et $\varphi(t)$ sont arbitraires dans $H_0^2(\omega)$ et $D(0, T)$, donc

$$(64) \quad \left| \begin{aligned} 2\rho u_3^0 &= \int_0^t \overline{x_3 \partial_{\alpha\beta} \tilde{\Sigma}_{\alpha\beta}^0} ds + \overline{x_3 \int_0^t ds \int_0^s \partial_{\alpha} f_{\alpha}^0} + \int_0^t ds \int_0^s \partial_{\alpha} (g_{\alpha}^{+0} - g_{\alpha}^{-0}) \\ &\quad + \int_0^t ds \int_0^s \overline{f_3^0} + \int_0^t ds \int_0^s (g_3^{+0} + g_3^{-0}) + \int_0^t \overline{\rho v_{0_3}^0} \end{aligned} \right|$$

puis, en dérivant par rapport à t ,

$$(65) \quad \left| \begin{aligned} 2\rho \dot{u}_3^0 &= \overline{x_3 \partial_{\alpha\beta} \tilde{\Sigma}_{\alpha\beta}^0} + \int_0^t \overline{x_3 \partial_{\alpha} f_{\alpha}^0} ds + \int_0^t \partial_{\alpha} (g_{\alpha}^{+0} - g_{\alpha}^{-0}) ds + \int_0^t \overline{f_3^0} ds \\ &\quad + \int_0^t (g_3^{+0} + g_3^{-0}) ds + \overline{\rho v_{0_3}^0} \end{aligned} \right|$$

En éliminant dans (65) le terme $\tilde{\Sigma}_{\alpha\beta}^0$ grâce aux relations (58) et en dérivant de nouveau par rapport à t , on obtient l'équation d'évolution vérifiée par u_3^0 pour presque tout $t \in [0, T]$:

$$(66) \quad 2\rho \ddot{u}_3^0 + \frac{2E}{3(1-\nu^2)} \Delta^2 u_3^0 + \frac{2\alpha E}{3(1-\nu)} \Delta \tilde{\xi}^0 = F_3^0$$

Cette relation est vérifiée dans $L^2(0, T, H^{-4}(\omega))$.

La valeur des traces sur $\partial\omega$ de u_3^0 et $\partial_n u_3^0$ est une conséquence immédiate de $u_3^0 = \dot{U}_3^0$ et $U_3^0 \in L^\infty(0, T, H_0^2(\omega))$.

Cinquième étape : obtention des conditions initiales de u_3^0

Puisque $U_3^0 = \int_0^t u_3^0 ds$ avec $u_3^0 \in L^\infty(0, T, L^2(\omega))$, on a $U_3^0 \in C^0(0, T, L^2(\omega))$, de sorte qu'on peut localiser en $t = 0$ l'équation (65) et obtenir la valeur initiale $\dot{u}_3^0(0) = \frac{1}{2} \overline{v_{0_3}^0}$.

L'équation (65) entraîne $\dot{u}_3^0 \in L^\infty(0, T, H^{-2}(\omega))$. Par conséquent u_3^0 est élément de $W^{1,\infty}(0, T, H^{-2}(\omega))$ et admet une trace dans $H^{-2}(\omega)$ en $t = 0$ que nous calculons.

Soient $W(x) \in V_{KL}$, $\eta(t) \in C_0^\infty([0, s])$.

On multiplie respectivement (49) et (50) par $\eta(t) W_\alpha(x)$ et $\eta(t) W_3(x)$, on intègre sur $\Omega \times (0, T)$ puis on additionne les deux relations. Il vient alors

$$\left| \begin{aligned} & \int_0^s \eta(t) dt \int_\Omega \rho \varepsilon^2 \dot{u}_\alpha(\varepsilon) W_\alpha dx + \int_0^s \eta(t) dt \int_\Omega \left(\int_0^t \sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon) \right) \partial_\beta W_\alpha dx \\ & + \int_0^s \eta(t) dt \int_\Omega \rho \dot{u}_3(\varepsilon) W_3 dx = \int_0^s \eta(t) dt \left[\int_\Omega \left(\int_0^t f_\alpha(\varepsilon) \right) W_\alpha dx \right. \\ & + \int_\Omega \left(\int_0^t \frac{1}{\varepsilon^2} f_3(\varepsilon) \right) W_3 dx + \int_{\Gamma^\pm} \left(\int_0^t \frac{1}{\varepsilon} g_\alpha^\pm(\varepsilon) \right) W_\alpha dy \\ & \left. + \int_{\Gamma^\pm} \left(\int_0^t \frac{1}{\varepsilon^3} g_3^\pm(\varepsilon) \right) W_3 dy + \int_\Omega \rho \varepsilon^2 v_{0\alpha}^0(\varepsilon) W_\alpha dx + \int_\Omega \rho v_{03}^0(\varepsilon) W_3 dx \right] \end{aligned} \right|$$

Si l'on se restreint dans cette relation à W_α de la forme $-x_3 \partial_\alpha W_3$ avec $W_3 \in H_0^2(\omega)$ et si l'on fait tendre ε vers 0, l'équation obtenue à la limite est

$$(67) \quad \left| \begin{aligned} & - \int_0^s \eta(t) dt \int_\omega \overline{x_3 \tilde{\Sigma}_{\alpha\beta}^0} \partial_{\alpha\beta} W_3 dy \\ & - 2\rho \int_0^s \eta(t) dt \int_\omega u_3^0 W_3 dy - \eta(0) 2\rho \int_\omega u_{03}^0 W_3 dy \\ & = \int_0^s \eta(t) dt \left[- \int_\omega \left(\int_0^t (\overline{x_3 f_\alpha^0} + g_\alpha^{+0} - g_\alpha^{-0}) \right) \partial_\alpha W_3 dy \right. \\ & \left. + \int_\omega \left(\int_0^t (\overline{f_3^0} + g_3^{+0} + g_3^{-0}) \right) W_3 dy + \int_\omega \overline{\rho v_{03}^0} W_3 dy \right] \end{aligned} \right|$$

Par ailleurs, si l'on applique W_3 dans la dualité $\langle, \rangle_{H^{-2}(\omega), H_0^2(\omega)}$ à (65), si l'on multiplie par $\eta(t)$, qu'enfin l'on intègre sur $[0, s]$, on obtient

$$(68) \quad \left| \begin{aligned} & 2\rho \int_0^s \eta(t) \langle \dot{u}_3^0, W_3 \rangle_{H^{-2}, H_0^2} dt \\ & = \int_0^s \eta(t) dt \left[\int_\omega \overline{x_3 \tilde{\Sigma}_{\alpha\beta}^0} \partial_{\alpha\beta} W_3 dy \right. \\ & - \int_\omega \left(\int_0^t (\overline{x_3 f_\alpha^0} + g_\alpha^{+0} - g_\alpha^{-0}) \right) \partial_\alpha W_3 dy \\ & \left. + \int_\omega \left(\int_0^t (\overline{f_3^0} + g_3^{+0} + g_3^{-0}) \right) W_3 dy + \int_\omega \overline{\rho v_{03}^0} W_3 dy \right] \end{aligned} \right|$$

En effectuant l'intégration par parties

$$\int_0^s \eta(t) \langle \dot{u}_3^0, W_3 \rangle_{H^{-2}, H_0^2} dt = - \int_0^s \dot{\eta}(t) dt \int_{\omega} u_3^0 W_3 dy - \eta(0) \langle u_3^0(0), W_3 \rangle_{H^{-2}, H_0^2}$$

il suffit de rapprocher (67) et (68), vraies pour toute fonction $\eta(t)$ dans $C_0^\infty([0, s])$, pour déduire la relation $\langle u_3^0(0), W_3 \rangle_{H^{-2}, H_0^2} = \int_{\omega} u_{03}^0 W_3 dy$, vérifiée par toute fonction W_3 de $H_0^2(\omega)$, d'où l'on obtient

$$(69) \quad u_3^0(0) = u_{03}^0.$$

Sixième étape : établissement des équations vérifiées par (\tilde{u}_α^0)

Revenons à l'équation (63) dans laquelle nous choisissons $W_3 = 0$ et $W_\alpha = \tilde{W}_\alpha$ quelconque dans $H_0^1(\omega)$. Elle se simplifie en

$$\int_0^T \varphi(t) dt \int_{\Omega} \tilde{\Sigma}_{\alpha\beta}^0 \partial_\beta \tilde{W}_\alpha dx = \int_0^T \varphi(t) dt \left[\int_{\Omega} \left(\int_0^t f_\alpha^0 \right) \tilde{W}_\alpha dx + \int_{\Gamma^\pm} \left(\int_0^t g_\alpha^{\pm 0} \right) \tilde{W}_\alpha dy \right]$$

avec $\varphi(t)$ quelconque dans $D(0, T)$, donc, pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$\partial_\beta \overline{\tilde{\Sigma}_{\alpha\beta}^0} + \int_0^t F_\alpha^0 ds = 0 \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

Grâce aux relations (58), cette équation s'écrit encore

$$\frac{2E}{1+\nu} \partial_\beta e_{\alpha\beta}(\tilde{U}^0) + \frac{2\nu E}{1-\nu^2} \partial_\alpha \operatorname{tr} e(\tilde{U}^0) - \frac{2\alpha E}{1-\nu} \int_0^t \partial_\alpha \xi^0 ds + \int_0^t F_\alpha^0 ds = 0$$

Il suffit de dériver par rapport à t pour obtenir l'équation

$$(70) \quad \frac{2E}{1+\nu} \partial_\beta e_{\alpha\beta}(\tilde{u}^0) + \frac{2\nu E}{1-\nu^2} \operatorname{tr} e(\tilde{u}^0) - \frac{2\alpha E}{1-\nu} \partial_\alpha \xi^0 + F_\alpha^0 = 0$$

valable dans l'espace des distributions $D'((0, T) \times \omega)$.

Septième étape : résultat d'unicité pour le problème vérifié par u_3^0

Il est la conséquence du

Lemme 3.3

On suppose F élément de $W^{1,2}(0, T, L^2(\omega))$ et u^0 élément de $L^2(\omega)$.

Alors le problème

$$(71) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in W^{1,2}(0, T, H^{-2}(\omega)) \cap L^2(0, T, L^2(\omega)) \\ \int_0^t u \, ds \in L^2(0, T, H_0^2(\omega)) \\ 2\rho \dot{u} + \frac{2E}{3(1-\nu^2)} \Delta^2 \int_0^t u \, ds = F \quad \text{dans } \omega \\ u = 0 \quad \text{dans } D'(0, T, H^{3/2}(\partial\omega)) \\ \partial_n u = 0 \quad \text{dans } D'(0, T, H^{1/2}(\partial\omega)) \\ u(0) = u^0 \end{array} \right.$$

admet au plus une solution.

Démonstration :

On suppose que u_1 et u_2 sont deux solutions de (71) et on appelle u leur différence.

Soit v la solution dans $W^{1,2}(0, T, H_0^2(\omega))$ de $\Delta^2 v = u$.

On a alors, pour tout s appartenant à $]0, T[$,

$$\int_0^s \langle \dot{u}, v \rangle_{H^{-2}, H_0^2} \, dt = \int_0^s dt \int_\omega \Delta \dot{v} \, \Delta v \, dy = \frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} \| \Delta v(t) \|_{L^2(\omega)}^2 \, dt$$

et

$$\int_0^s \langle \Delta^2 \int_0^t u, v \rangle_{H^{-2}, H_0^2} \, dt = \int_0^s \langle \Delta^2 v, \int_0^t u \rangle_{H^{-2}, H_0^2} \, dt = \frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} \| \int_0^t u \|_{L^2(\omega)}^2 \, dt$$

On applique v à (71)₃ dans la dualité $\langle, \rangle_{H^{-2}, H_0^2}$ et on utilise les deux relations précédentes pour obtenir l'égalité

$$\rho \| \Delta v(s) \|_{L^2(\omega)}^2 - \rho \| \Delta v(0) \|_{L^2(\omega)}^2 + \frac{E}{3(1-\nu^2)} \| \int_0^s u \|_{L^2(\omega)}^2 = 0$$

or, $u(0) = 0$
donc $v(0) = 0$

Par suite, l'égalité précédente entraîne $\Delta v(s) = 0$ pour tout s appartenant à $]0, T[$, d'où l'on déduit que u est identiquement nulle, ce qui achève la démonstration du lemme 3.3.

Huitième étape : résultat d'unicité pour le problème vérifié par (\tilde{u}_α^0)

Il est la conséquence du

Lemme 3.4

On suppose (f_α) élément de $L^2(0, T, [L^2(\omega)]^2)$

Alors le problème :

$$(72) \quad \left| \begin{array}{l} \text{il existe } U \in L^\infty(0, T, [H_0^1(\omega)]^2) \text{ tel que } u = \dot{U} \\ \frac{2E}{1+\nu} \partial_\beta e_{\alpha\beta}(u) + \frac{2E\nu}{1-\nu^2} \text{tr } e(u) = f_\alpha \text{ dans } \omega \end{array} \right.$$

admet au plus une solution.

Démonstration :

Soit S^0 l'opérateur qui, à tout élément v de $[H_0^1(\omega)]^2$, associe l'élément de $[H^{-1}(\omega)]^2$ défini par

$$(S^0 v)_\alpha = \frac{2E}{1+\nu} \partial_\beta e_{\alpha\beta}(v) + \frac{2E\nu}{1-\nu^2} \partial_\alpha \text{tr } e(v)$$

On considère u_1 et u_2 deux solutions de (72) et U_1 et U_2 les éléments de $L^\infty(0, T, [H_0^1(\omega)]^2)$ qui leur correspondent.

Pour chaque $i = 1; 2$, $S^0 u_i = f$, donc il existe g_i élément de $[H^{-1}(\omega)]^2$ tel que

$$S^0 U_i = \int_0^t f \, ds + g_i .$$

S^0 réalise une bijection entre $[H_0^1(\omega)]^2$ et $[H^{-1}(\omega)]^2$ donc il existe w_i élément de $[H_0^1(\omega)]^2$ tel que

$$S^0 w_i = g_i$$

Par différence, il vient

$$S^0(U_1 - U_2) = S^0(w_1 - w_2)$$

d'où l'on obtient, puisque S^0 est bijective et en dérivant par rapport à t ,

$$u_1 = u_2 ,$$

ce qui achève la démonstration du lemme 3.4.

Au cours des six premières étapes, nous avons établi l'ensemble des relations (56) à (59) et au cours des deux dernières, grâce aux lemmes 3.3 et 3.4, nous avons prouvé l'unicité de la solution des problèmes vérifiés par les composantes du déplacement limite u^0 . Cela achève la démonstration du théorème 3.2. ■

Remarque 3.2

Il est intéressant de rapprocher la démonstration du théorème 3.1 de celle du théorème 2.1 qui énonçait des résultats de convergence faible dans le cas $\gamma^\epsilon = \epsilon\gamma$. Nos démarches sont très voisines ; elles se distinguent essentiellement par l'intégration que nous effectuons au préalable des loi de comportement et équation du mouvement lorsque $\gamma^\epsilon = \gamma/\epsilon$.

Les équations qui gouvernent la limite u^0 du déplacement ne sont guère modifiées formellement (seul s'ajoute un terme de température dans celle de la composante verticale de u^0) mais elles ne sont plus établies dans les mêmes espaces fonctionnels ; elles sont vérifiées dans un sens plus faible. La différence principale concerne la température limite θ^0 qui n'est plus la solution d'une équation aux dérivées partielles mais se calcule algébriquement en fonction des données.

L'établissement de résultats de convergence forte paraît délicat. Il serait naturel de les faire porter sur les termes intégrés par rapport au temps qui apparaissent en (48). Si, pour cela, nous procédons ainsi qu'au théorème 2.2, nous nous heurtons aux termes $\partial_\alpha \theta(\epsilon)$ et $1/\epsilon \partial_3 \theta(\epsilon)$ pour lesquels nous ne possédons aucun résultat de convergence faible. Un résultat préliminaire de convergence forte portant sur $\theta(\epsilon)$ paraît nécessaire, de même que pour la convergence faible, nous avons prouvé celle de la température au théorème 3.1 avant celle des autres termes.

En outre, une autre difficulté concerne la condition de compatibilité qui ne porterait plus seulement sur les données et les valeurs initiales des termes limites mais leur mêlerait des termes couplant température et déplacements horizontaux ; il ne s'agirait donc plus d'une condition de compatibilité.

4 Etude de la convergence dans le cas $\gamma^\epsilon = \gamma$

Comme nous l'avons vu, le cas $\gamma^\epsilon = \gamma/\epsilon$ exigeait un examen particulier et nous a demandé d'adapter notre démarche en conséquence. Celui que nous traitons maintenant lui est tout à fait analogue, tant en ce qui concerne les résultats que la méthode utilisée pour les établir. Sans les détailler, nous indiquons comment les étapes essentielles de notre raisonnement continuent de se dérouler.

Nous maintenons dans la suite les hypothèses (17) et (19). Nous énonçons au lemme 3.1 nos premiers résultats d'estimation a priori. Lorsque $\gamma^\epsilon = \gamma$, ils deviennent plus précis, comme le montre le

Lemme 4.1 (premières estimations a priori)

$$\begin{array}{ll}
 \theta(\epsilon) & \text{est borné dans } L^2(0, T, L^2(\Gamma^\pm)) \\
 \sqrt{\epsilon} \theta(\epsilon) & \text{est borné dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \\
 \sqrt{\epsilon} \partial_\alpha \theta(\epsilon) & \text{est borné dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \\
 \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \partial_3 \theta(\epsilon) & \text{est borné dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \\
 \sqrt{\epsilon} \tilde{e}(u(\epsilon)) & \text{est borné dans } L^\infty(0, T, [L^2(\Omega)]^9) \\
 \sqrt{\epsilon} u(\epsilon) & \text{est borné dans } L^\infty(0, T, \mathbf{H}) \\
 \epsilon^{3/2} \dot{u}_\alpha(\epsilon) & \text{est borné dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \\
 \sqrt{\epsilon} \dot{u}_3(\epsilon) & \text{est borné dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \\
 \sqrt{\epsilon} \tilde{\sigma}(\epsilon) & \text{est borné dans } L^\infty(0, T, [L^2(\Omega)]^9)
 \end{array}
 \tag{73}$$

indépendamment de ϵ .

Démonstration :

Elle est analogue à celle des lemmes 2.1 et 3.1.

L'inégalité (21) s'écrit ici :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha=1}^2 \|\epsilon \dot{u}_\alpha(\epsilon)\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}^2 + \|\dot{u}_3(\epsilon)\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}^2 \\
& + \|\tilde{e}(u(\epsilon))\|_{L^\infty(0,T,[L^2(\Omega)]^3)}^2 + \|\theta(\epsilon)\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}^2 \\
& + \sum_{\alpha=1}^2 \|\partial_\alpha \theta(\epsilon)\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + \left\| \frac{1}{\epsilon} \partial_3 \theta(\epsilon) \right\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 \\
& + \frac{1}{\epsilon} \|\theta(\epsilon)\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma^\pm))}^2 \leq C \left[1 + \|u(\epsilon)\|_{L^\infty(0,T,[L^2(\Omega)]^3)} \right. \\
& \left. + \|u(\epsilon)\|_{L^\infty(0,T,[L^2(\Gamma^\pm)]^3)} + \frac{1}{\epsilon} \|\theta(\epsilon)\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma^\pm))} \right]
\end{aligned}$$

avec C constante positive indépendante de ϵ .

Il suffit de multiplier par ϵ pour obtenir les estimations (73). ■

Comme au cas précédent, ces premières estimations permettent d'énoncer un résultat de convergence faible sur la température vers une limite que se détermine algébriquement.

C'est le propos du

Théorème 4.1 (convergence faible de la température)

Il existe une suite extraite $\theta(\epsilon)$ telle que, quand ϵ tend vers 0,

$$(74) \quad \left| \begin{array}{l} \theta(\epsilon) \rightharpoonup \theta^0 = \xi^0 \text{ faiblement dans } L^2(0,T,L^2(\Omega)) \\ \text{avec } \xi^0 = \frac{\theta^+ + \theta^-}{2} \end{array} \right.$$

Démonstration :

L'existence d'une sous-suite de $\theta(\epsilon)$ faiblement convergente dans $L^2(0,T,L^2(\Omega))$ se démontre ainsi qu'au théorème 3.1. Pour déterminer l'expression de la limite θ^0 , on considère $Z(y) \in H_0^1(\omega)$ dans (15), que l'on multiplie par $\epsilon\varphi(t)$ avec $\varphi(t) \in D(0,T)$ puis on intègre sur $[0,T]$.

Alors, quand ϵ tend vers 0 :

$$\int_0^T \varphi(t) dt \int_{\Gamma^\pm} (\theta^0 - \theta^\pm) Z dy = 0$$

donc, pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$\int_{\omega} (\theta^0|_{\Gamma^+} + \theta^0|_{\Gamma^-} - \theta^+ - \theta^-) Z dy = 0$$

Or, puisque $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \partial_3 \theta(\epsilon)$ est borné dans $L^2(0, T, L^2(\Omega))$, θ^0 est une fonction indépendante de x_3 . La relation précédente, valable pour tout élément Z de $H_0^1(\omega)$, détermine θ^0 . ■

Les estimations du lemme 4.1, nous l'avons vu, entraînent celles du lemme 3.1 et le théorème 4.1 est analogue au théorème 3.1, à la disparition près de la partie linéaire en x_3 de θ^0 . C'est pourquoi les énoncés du lemme 3.2, corollaire 3.1 et théorème 3.2, demeurent ici valables, à condition d'égaliser à 0 le terme $\hat{\xi}^0$ de (56).

conclusion

Cette étude de la convergence du problème initial 3D vers un problème limite 2D conforte les résultats que nous avait fournis l'examen purement formel effectué dans Lebeltel [1989]. Elle confirme l'absence de couplage véritable, dans le modèle limite, entre le déplacement vertical u_3^0 et la température θ^0 . En effet, le seul terme de couplage intervenant dans l'équation d'évolution de u_3^0 , dans le cas $\gamma^\epsilon = \gamma/\epsilon$, porte sur la limite de la température connue par ailleurs algébriquement en fonction des données. Ceci semble inhérent au modèle élastique de thermoélasticité linéarisée qui sert de point de départ à toute cette étude.

C'est la recherche d'un couplage qui a motivé les différents changements d'échelle effectués sur le paramètre γ^ϵ . Si la difficulté s'en est trouvée accrue avec l'étude délicate des deux derniers cas, l'intérêt mathématique des problèmes posés n'en a été que plus vif.

ISSN 0249 - 6399